TOMO VII 15 de Junio Núm. 53

ANALES DEL INSTITUTO DE INGENIEROS

SOBRE UNA FÓRMULA DE CUBICACION

DE IMPORTANCIA TÉCNICA I TEÓRICA (1)

I. Los CUERPOS DE SIMPSON.—Figurémonos un cuerpo matemático cualquiera, cortado por un plano horizontal fijo, que elejimos como *plano de oríjen*, para referir a él otras secciones planas horizontales i variables, por medio de sus distancias al plano primitivo las que llamamos las *cotas* de los planos variables. Una cota la consideramos como positiva o negativa, segun el plano respectivo pase por encima o por debajo del plano de oríjen. Si por Sz designamos la superficie de una seccion horizontal, variable, cuya cota es $=z$, es evidente que Sz será una funcion de la cota variable z, cuya naturaleza dependerá de la forma del cuerpo; es decir tenemos en jeneral:

$$Sz = f(z).$$

Definicion: Se llaman *cuerpos de Simpson* (segun el matemático que fundó su teoria) aquellos, en los cuales se verifica; que f(z) es una funcion aljebráica que no pase del tercer grado, de manera que

$$Sz = a + bz + cz^2 + dz^3,$$

Alfa = L.—Beta = B.—Gama = v.

donde naturalmente uno o varios de los coeficientes a, b, c, d, pueden reducirse a cero. Cuando $d = o$, la funcion se convierte en una del segundo grado, i este es precisamente el caso de mas importancia práctica, como se verá mas adelante.

Observaremos de paso, que el grado de la funcion $f(z)$ no varia, elijiendo como plano de oríjen otra seccion horizontal cualquiera; pues si la cota de esta es $= h$ (positivo o negativo), i designando las cotas referidas a este nuevo plano de oríjen por z', tenemos la relacion: $z = z' + h$, i sustituyendo este valor de z en la ecuacion $Sz = f(z)$, se ve facilmente que la nueva funcion de z' conserva el mismo grado.

II. Fórmula de cubicacion de los cuerpo de Simpson.—Consideremos una zona de nuestro cuerpo, comprendida entre dos secciones, cuyas cotas sean C i C′ i llevemos otra seccion horizontal intermedia, a distancias iguales de aquellas, la que llamaremos la *seccion media* de la zona; su cota será $= \frac{C+C'}{2}$. Las superficies de las bases de la zona sean $= B$ i B' i la de la seccion media $= M$; el volúmen de la zona resultará exactamente de la fórmula siguiente llamada *fórmula de Simpson*:

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4M),$$

donde h es la altura de la zona: $h = C' - C$.

Demostracion: Como sabemos ya que el grado de la funcion $f(z)$ no varia, cualquiera que sea el plano de oríjen, podemos elejir como tal la base inferior de la zona. En este caso tenemos.

$$B = S_o = f(o) = a$$

$$B' = S_h = f(h) = a + bh + ch^2 + dh^3$$

$$M = \frac{S_h}{2} = f\left(\frac{h}{2}\right) = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$$

o

$$4M = 4a + 2bh + ch^2 + \frac{dh^3}{2}$$

El volúmen de la zona seria por consiguiente, segun la fórmula de Simpson, que se trata de demostrar:

$$V=\frac{h}{6}\left(6a+3bh+2ch^2+\frac{3}{2}dh^3\right),$$

o
$$V=ah+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}+\frac{dh^4}{4}. \qquad (a)$$

Si consideramos ahora una zona infinitamente delgada, cuyas bases tengan las cotas z, $z+dz$, su volúmen será:

$$dV=Szdz=(a+bz+cz^2+dz^3)dz,$$

lo que representa la diferencial del volúmen de nuestro cuerpo de Simpson, i la espresion jeneral para este volúmen será:

$$V=\int(a+bz+cz^2+dz^3)dz,$$

debiéndose tomar este íntegral entre los límites que marcan las cotas de las bases de la zona que se quiera cubicar. En nuestro caso el límite inferior es $z=0$, i el límite superior $z=h$. Tenemos en jeneral:

$$V=\int Szdz=az+\frac{bz^2}{2}+\frac{cz^3}{3}+\frac{dz^4}{4}$$

Con el límite inferior esta espresion se reduce a cero, luego:

$$V=ah+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}+\frac{dh^4}{4} \qquad (b)$$

Comparando las ecuaciones (a) i (b), se vé que son idénticas, luego queda demostrada la exactitud rigurosa de la fórmula: $V=\frac{h}{6}(B+B'+4M)$ para los cuerpos de Simpson.

III. Cuerpos jeométricos comprendidos en el tipo jeneral de los cuerpos de Simpson.—Estos son principalmente los siguientes:

(a) *La pirámide.* En efecto, elijiendo como plano de orijen un plano que pasa por la cúspide de la pirámide, paralelo a su base, sabemos que las superficies de todas las secciones paralelas a la base son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide, o sea al plano de orijen, de manera que en este caso tenemos: $Sz = mz^2$, es decir una funcion f(z) del segundo grado.

(b) *El prismatóide.* Bajo este nombre, como es sabido, se comprende un cuerpo, limitado por dos polígonos independientes entre sí, situados en planos paralelos (las bases del cuerpo) i lateralmente por una série de triángulos de los cuales cada uno tiene un lado comun en una de las bases i el vértice opuesto con la otra. Cada prismatóide se puede descomponer en dos pirámides que tienen por base las del prismatóide i la misma altura de éste, i ademas en una série de tetraedros, cuyo número depende del de los lados de las bases. Llevando un plano de seccion paralelo a las bases, no es difícil convencerse que cada una de las superficies de las secciones parciales enjendradas en las dos pirámides i los tetraedros es una funcion del segundo grado de la misma cota variable, luego lo será tambien su suma o sea la superficie de la seccion total. Si nos figuramos un prismatóide, cuyas caras laterales sean infinitamente delgadas, llegamos a la conclusion importante, espresada en el siguiente.

Teorema: *Son cuerpos de Simpson todos aquellos que son limitados por dos planos paralelos i una snperficie reglada* (gausa en jeneral) (ejemplos: el hiperbolóide de una napa i el hiperbolóide parabólico).

(c) *El obelisco.* Este cuerpo es un prismatóide, en el cual cada dos lados hómologos de las bases van paralelos (sin que en jeneral sus bases sean polígonos semejantes). Su superficie lateral se compone de trapecios, de los cuales uno o varios pueden reducirse a triángulos. Si sus caras laterales son infitamente delgadas, resulta una superficie reglada desarrollable (ejemplos: los conos i cilindros.)

(d) *Los cuerpos limitado por una superficie del segundo grado i dos planos paralelos a uno de sus planos principales.*

1) *El elipsoide.* La ecuacion de esta superficie, referida a un sistema de tres ejes perpendiculares entre sí, es:

$$\frac{x^2}{L^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{v^2}=1,$$

donde L, B i V son los semi-ejes i los planos de coordenadas los planos principales del elipsóide. Si llevamos un plano $z=c$, paralelo al plano (x, y), obtenemos como ecuacion de la curva de interseccion:

$$\frac{x^2}{L^2}+\frac{y^2}{B^2}=1-\frac{c^2}{v^2}=\frac{v^2-c^2}{v^2},$$

o $$\frac{v^2}{L^2(v^2-c^2)}x^2+\frac{v^2}{B^2(v^2-c^2)}y^2=1,$$

es decir una elipse, cuyos semi-ejes L′ i B′ son:

$$L'=\frac{L}{v}\sqrt{v^2-c^2}$$

$$B'=\frac{B}{v}\sqrt{v^2-c^2}$$

La superficie de esta elipse es:

$$S=\pi L'B'=\frac{\pi LB}{v^2}(v^2-c^2),$$

es decir una funcion del segundo grado de la cota variable c. Lo mismo sucede naturalmente con las secciones paralelas a los otros planos principales del elipsóide.

2) *El hiperbolóide de una napa.*

Su ecuacion es: $\frac{x^2}{L^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{v^2}=1.$

Un plano $z = c$ da por interseccion una elipse cuya ecuancion es:

$$\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 + \frac{c^2}{v^2} = \frac{v^2 + c^2}{v^2},$$

luego su superficie:

$$S = \frac{\pi LB}{v^2}(v^2 + c^2),$$

es decir otra vez una funcion del segundo grado de la cota c. Las secciones paralelas a los otros dos planos principales de este cuerpo son hipérboles, es decir superficies ilimitadas, en cuyo caso la fórmula de Simpson no puede tener aplicacion.

3) *El hiperbolóide de dos napas.*—Su ecuacion es:

$$\frac{x^2}{L^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{v^2} = 1.$$

Un plano $x = a$, paralelo al plano (y,z) da por interseccion una elipse cuya ecuacion es:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{v^2} = \frac{a^2}{L^2} - 1 = \frac{a^2 - L^2}{L^2}$$

cuyos semi-ejes B' i v' son:

$$B' = \frac{B}{L}\sqrt{a^2 - L^2}$$

$$v' = \frac{v}{L}\sqrt{a^2 - L^2}$$

por consiguiente su superficie

$$S = \frac{\pi Bv}{L^2}(a^2 - L^2),$$

es decir una funcion del segundo grado de la cota variable a, que como se vé debe ser $>$L, para que haya seccion real. Las secciones paralelas a los otros dos planos principales son hipérboles.

4) *El paraboloide elíptico.*—Su ecuacion es:

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{v^2}=\frac{x}{L}$$

Un plano x = a, paralelo al plano principal (y,z) da por interseccion una elipse cuya ecuacion es:

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{v^2}=\frac{a}{L},$$

cuyos semi-ejes B′ i v′ son por consiguiente:

$$B'=B\sqrt{\frac{a}{L}} \text{ i } v'=v\sqrt{\frac{a}{L}},$$

luego su superficie

$$S=\pi\frac{Bv}{L}a,$$

es decir una funcion del primer grado de la cota variable a. Las secciones paralelas a los otros planos principales son parábolas, es decir curvas de superficies ilimitadas.

5) *El paraboloide hiperbólico.*—Su ecuacion es:

$$\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{v^2}=\frac{x}{L}$$

En este cuerpo las secciones al plano (y,z) son hipérboles i las paralelas a los otros dos plano principales son parábolas; así mismo cualquiera otra seccion plana oblícua es de superficie ilimitada, luego la fórmula de Simpson no tiene aplicacion, a pesar de que esta superficie, como es sabido, es una superficie reglada, que puede ser enjendrada por una línea recta que va constantemente paralela a un plano fijo, resbalando al mismo tiempo sobre dos rectas fijas, no situadas en el mismo plano.

e) Cuerpos en los cuales se verifica que la funcion $Sz = f(z)$ es del tercer grado, existen naturalmente, pero no son de importancia en la práctica. Un ejemplo de estos cuerpos de Simpson seria p. c. la superficie de revolucion enjendrada por la curva:

$$x^2 = a + bz + cz^2 + dz^3,$$

situada en el plano (x,z) i que jiraría en torno del eje de las z.

IV. Aplicaciones de la fórmula de Simpson.—Hemos visto arriba que la fórmula:

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4M)$$

es rigurosamente exacta para la cubicacion de los cuerpos de Simpson. *Para los demas cuerpos la fórmula es aproximativa* i como tal la empleó ya Newton.

En efecto, si la funcion f(z) es una cualquiera, aljebráica o trascendental, podemos desarrollarla, segun potencias crecientes de z, obteniendo:

$$Sz = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots .$$

hasta lo infinito, resultando asi

$$\text{(L)}\quad V = \int_0^h Szdz = a_0 h + \frac{a_1 h^2}{2} + \frac{a_2 h^3}{3} + \frac{a_3 h^4}{4} + \frac{a_4 h^5}{5} + \frac{a_5 h^6}{6} + \dots$$

i por otra parte:

$$B = S_0 = a_0$$

$$B' = S_h = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + a_5 h^5 + a_6 h^6 + \dots .$$

$$4M = \frac{4S h}{2} = 4a_0 + 2a_1 h + a_2 h^2 + \frac{a_3 h^3}{2} + \frac{a_4 h^4}{4} + \frac{a_5 h^5}{8} + \frac{a_6 h^6}{16} + \dots .$$

luego segun la fórmula de Simpson:

$$(B)\ V = a_0h + \frac{a_1h^2}{2} + \frac{a_2h^3}{3} + \frac{a_3h^4}{4} + \frac{5}{24}a_4h^5 + \frac{7}{48}a_5h^6 + \frac{17}{64}a_6h^7 + \ldots$$

como se vé la discrepancia entre las fórmulas (L) i (B) principia con la quinta potencia de h i la diferencia entre la espresion exacta (L) i la deducida de la fórmula de Simpson será evidentemente tanto mas pequeña miéntras menor sea h, es decir, la fórmula de Simpson, aplicada a un cuerpo cualquiera dará resultados tanto mas aproximados, miéntras menor sea la altura h de la zona cuyo volúmen se trata de determinar.

La importancia técnica de la fórmula de Simpson, consiste principalmente en que por medio de ella, se puede determinar aproximadamente el volúmen de un cuerpo cualquiera de superficie curva, i segun lo que acabamos de ver se recomienda hacer la cubicacion por zonas sucesivas delgadas.

Despues de haber señalada la importancia capital de nuestra fórmula, pasamos a aplicarla a algunos de los cuerpos que hemos reconocido como cuerpos de Simpsion.

(a) *El tronco de pirámide.*—Un lado de una de las bases sea $= a$ i el lado homólogo de la otra base $= a'$; entónces el lado correspondiente de seccion media (semejante a las bases) será $= \frac{a + a'}{2}$

Si la superficie de la primera base es $B = ma^2$ (donde m es un coeficiente numérico que depende de la forma de la base), la de la otra base será $B' = ma'^2$ i la de la seccion media $M = m\frac{(a + a')^2}{4}$, luego el volúmen del cuerpo segun la fórmula de Simpson:

$$V = \frac{mh}{6}[a^2 + a'^2 + (a + a')^2],$$

o

$$V = \frac{mh}{6}[2a^2 + 2a'^2 + 2aa']$$

$$V = \frac{h}{3}(ma^2 + ma'^2 + maa'); \text{ pero}$$

$$maa' = \sqrt{ma^2 + ma'^2} = \sqrt{BB'}, \text{ luego}$$

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}), \text{ es decir}$$

la fórmula de Simpson conduce a la misma fórmula que en estereometría elemental se obtiene de una manera mucho mas complicada.

(b) *Obelisco con bases rectangulares* (en frances «ponton»). Los lados de las bases sean a, b i a′ b′ entónces los lados de la seccion media, rectangular tambien, serán $\frac{a+a'}{2}$ i $\frac{b+b'}{2}$, luego

$$B = ab, \quad B' = a'b' \quad i \quad M = \frac{(a+a')(b+b')}{4}$$

por consiguiente, si la altura del cuerpo es $= h$,

$$V = \frac{h}{6}(ab + a'b' + ab + ab' + a'b + a'b')$$

$$V = \frac{h}{6}(2ab + 2a'b' + ab' + a'b),$$

o en una forma mas conveniente para el cálculo numérico:

$$V = h\left(\frac{a+a'}{2} \times \frac{b+b'}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{a-a'}{2} \times \frac{b-b'}{2}\right) \qquad (1)$$

Si las bases del obelisco son cuadrados, es decir si $a = b$ i $a' = b'$, resulta:

$$V = h\left(\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2\right) \qquad (2)$$

(c) *Obelisco cuyas bases son trapecios.*—Las líneas medias (semi-sumas de las bases) de estos trapecios sean=a i a′ i sus alturas b i b′. La línea media de la seccion media (trapecio tambien) será $=\frac{a+a'}{2}$ i su altura $=\frac{b+b'}{2}$, luego

$$B=ab,\quad B'=a'b'\quad i\quad M=\frac{(a+a')(b+b')}{4},$$

como se vé estas espresiones son idénticas con las obtenidas bajo (b), de manera que el volúmen de nuestro cuerpo será:

$$V=h\left(\frac{a+a'}{2}\times\frac{b+b'}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{a-a'}{2}\times\frac{b-b'}{2}\right)\qquad(3)$$

donde sin embargo las letras a, b, a′ i b′ tienen otro significado que en la fórmula (2). Por lo demas se ve facilmente que el ejemplo anterior es un caso especial de éste.

(d) *Obelisco con bases triangulares.*—Dos lados homólogos de las bases sean = a i a′ i sus alturas correspondientes = b i b′. Tenemos entónces:

$$B=\frac{ab}{2},\quad B'=\frac{a'b'}{2}\quad i\quad M=\frac{1}{2}\,\frac{a+a'}{2}\times\frac{b+b'}{2}$$

por consiguiente: por analojía con los ejemplos anteriores:

$$V=\frac{h}{2}\left(\frac{a+a'}{2}\times\frac{b+b'}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{a-a'}{2}\times\frac{b-b'}{2}\right)\qquad(4)$$

(e) *Tronco de cono con bases circulares.*—Los radios de las bases sean r i r′, entónces el radio de la seccion media será $=\frac{r+r'}{2}$,

luego $\quad B=\pi r^2,\quad B'=\pi r'^2\quad i\quad M=\frac{\pi}{4}(r+r')^2$

por consiguiente: por analojía con el caso a que se refiere la fórmula (2)

$$V=\pi h\left(\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right) \qquad (5)$$

Esta fórmula es evidentemente mas cómoda para el cálculo numérico que la ordinaria:

$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+rr'+r'^2).$$

(f) *Tronco de cono con bases elípticas* (paralelas).—La fórmula de Simpson es aplicable a este caso, porque los conos son superficies regladas. Los semi-ejes de una de las elipses que forman las bases sean $=a$ i b, i los de la otra $=a'$ i b' entónces los de la seccion media serán $\frac{a+a'}{2}$ i $\frac{b+b'}{2}$, por consiguiente:

$$V=\pi h\left(\frac{a+a'}{2}\times\frac{b+b'}{2}+\frac{1}{3}\,\frac{a-a'}{2}\times\frac{b-b'}{2}\right) \qquad (6)$$

Observaremos que en este caso debe verificarse la proporcion: $a:a'::b:b'$.

Observacion: De nuestro desarrollo de la fórmula para el volúmen de un tronco de pirámide i de las fórmulas (5) i (6) se puede deducir, que los volúmenes de troncos de pirámides i troncos de conos, cuyas secciones medias i alturas son iguales, son tanto mayores, miéntras mayor sea la diferencia entre las superficies de sus bases, miéntras que, como veremos mas adelante, los volúmenes de zonas esféricas, que tienen, iguales secciones medias e iguales alturas, son enteramente independientes de la diferencia entre las bases circulares de la zona.

(g) *El tetraedro.*—Si por cada uno de dos cantos opuestos de un, tetraedro llevamos un plano paralelo al otro, tendremos dos planos paralelos entre sí, entre los cuales estará comprendido el cuerpo entero.

Bajo este punto de vista el tetraedro se puede considerar como un obelisco, cuyas bases serian los dos cantos opuestos a i b, es decir las superficies de sus bases serian $B = O$ i $B' = O$; la seccion media M vendria a ser un paralelógramo, cuyos lados serian $= \frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$, i el áugulo formado por ellos sería el ángulo de cruzamiento entre los dos cantos opuestos, el cual designaremos por L. La altura h del obelisco seria la distancia mas corta entre los cantos opuestos, i como $B = O$, $B' = O$, $M = ab$ sen. L resulta para el volúmen del tetraedro:

$$V = \frac{1}{6} abh \text{ sen. } L \qquad (7)$$

Esta fórmula nos revela el siguiente teorema, que no deja de ser interesante bajo el punto de vista teórico:

Teorema: El volúmen de un tetraedro es igual a la sesta parte del producto de dos cantos opuestos, multiplicado por la distancia mas corta cubre éstos i el seno de su ángulo de cruzamiento.

(h) *El elipsóide.*—Considerando este cuerpo como comprendido entre los planos tanjetes $z = +v$ i $z = -v$, se tiene:

$$B = O, \quad B' = O \quad i \quad M = \pi LB,$$

luego su volúmen:

$$V = \frac{h}{6} \times 4\pi LB = \frac{2v}{6} \times 4\pi LB = \frac{4}{3}\pi LBv.$$

Considerando una zona comprendida entre dos secciones equidistantes del plano principal (x,y); cuyos semi-ejes sean L' i B' tenemos:

$$B = B' = \pi L'B' \text{ i. } M = \pi LB,$$

luego el volúmen de esta zona, cuya altura sea $=$ h:

$$V = \frac{\pi h}{6}(2L'B' + 4LB)$$

o

$$V = \frac{\pi h}{3}(2LB + L'B'). \qquad (8)$$

Si el elipsóide es de revolucion en torno del eje de las Z, tenemos:

$$L = B = r \quad i \quad L' = B' = Q,$$

luego

$$V = \frac{\pi h}{3}(2r^2 = Q^2) \qquad (9)$$

Las fórmulas (8) i (9) son aplicables tambien a zonas comprendidas entre un plano principal i una seccion paralela a este, siempre que por h se entienda la altura de estas zonas.

Es fácil comprender que la fórmula (9) es aplicable a cualquier superficie de revolucion de Simpson, que tenga dos bases iguales.

Hemos visto en el capítulo III, bajo (d) (s) que los semiejes de una seccion elíptica enjendrada por un plano $z = c$, son

$$L' = \frac{L}{v}\sqrt{v^2 - c^2} \quad i \quad B = \frac{B}{v}\sqrt{v^2 - c^2},$$

luego

$$L'B' = \frac{LB}{v^2}(v^3 - c^3).$$

Si en vez de la cota c introducimos la flecha (sajita) o del casquete separado por el plano $z = c$, tenemos: $s = v - c$ o $c = v - s$. Con este valor de c resulta:

$$L'B' = \frac{LB}{v^2}[v^2 - (v - s)^2]$$

o

$$L'B' = \frac{LB}{v^2}(2vs - s^2)$$

Introduciendo este valor de L'B' en la fórmula (8), haciendo ademas h=c=v−s, obtenemos la siguiente fórmula para el volúmen de una zona comprendida entre el plano principal (x,y) i una seccion cuya sajita es=s:

$$V = \frac{\pi(v-s)}{3}\left[2LB + \frac{LB}{v^2}(2vs - s^2)\right],$$

o

$$V = \frac{\pi}{3}\,\frac{LB}{v^2}(v-s)(2v^2 + 2vs - s^2),$$

i finalmente:

$$V = \frac{\pi}{3}\,\frac{LB}{v^2}(2v^3 - 3vs^2 + 2s^3). \qquad (10)$$

Para obtener el volúmen del casquete del elipsóide, separado por el plano cuya sajita es = s, no hai mas que restar la espresion (10) de la mitad del volúmen del elipsóide, es decir, de

$$\frac{2}{3}\pi LBv,$$

resultando:

$$V = \pi\frac{LB}{v^2}s^2\left(v - \frac{s}{3}\right) \qquad (11)$$

El volúmen de una zona, comprendida entre dos planos paralelos al plano principal (x, y), cuyas sajitas sean s i s', resulta como diferencia de los casquetes respectivos de la fórmula siguiente:

$$V = \pi\frac{LB}{v^2}\left[s^2\left(v - \frac{s}{3}\right) - s'^2\left(v - \frac{s'}{3}\right)\right] \qquad (12)$$

Si el elipsóide es de revolucion, las fórmulas (10), (11) i (12) se modifican, haciendo L = B.

En el caso de la esfera, es decir, siendo L = B = v = r, la la fórmula (10) se convierte en:

$$V = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3rs^2 + s^3), \qquad (10'):$$

la fórmula (11) en:

$$V = \pi s^2 (r - \frac{s}{3}) \qquad (11')$$

i la fórmula (12'):

$$V = \pi [s^2 (r - \frac{s}{3}) - s'^2 (r - \frac{s'}{3})] \qquad (12'):$$

(i) *El hiperbolóide de una napa.* – En el capítulo III bajo (d) 2) hemos visto que la superficie de una seccion enjendrada por un plano $z - c$ es

$S = \frac{\pi L B}{v^2}(v^2 + c^2)$, luego para calcular el volúmen de una zona comprendida entre dos planos $z = +c$ i $z = -c$, equidistante al plano (x, y) tenemos estos elementos:

$$B = B' = \frac{\pi L B}{v^2}(v^2 + c^2) \text{ i } M = \pi L B,$$

por consiguiente

$$V = \frac{2\pi c}{6}\left(\frac{2LB}{v^2}(v^2 + c^2) + 4LB\right)$$

o

$$V = 2\pi \frac{LBc}{v^2}\left(v^2 + \frac{c^2}{2}\right), \qquad (13)$$

de manera que el volúmen de una zona comprendida entre el plano (x,y) i una seccion cuya cota $= c$, será:

$$V = \pi \frac{LBc}{v^2}(v^2 + \frac{c^2}{3}) \qquad (14)$$

i por consiguiente el volúmen de una zona comprendida entre dos planos cuyas cotas sean $z = c$ i $z = c'$, será:

$$V = \pi \frac{LB}{v^2} c \left[(v^2 + \frac{c^2}{3}) - c' (v^2 + \frac{c'^2}{3})\right] \qquad (15)$$

Si el hiperbolóide es de revolucion en torno del eje de las z, las fórmulas (13), (14) i (15) se modifican, haciendo $L = B = v$. Tambien se puede aplicar en este caso la fórmula (9).

Con respecto al hiperbolóide de una napa es de observar que es una superficie reglada, pues puede ser ejendrada por el movimiento contínuo de una línea recta que resbala constantemente sobre tres rectas fijas, de las cuales cada dos no estén situadss en el mismo plano. De aquí se sigue que la fórmula de Simpson es todavia aplicable a zonas de este cuerpo, comprendidas entre secciones paralelas, elípticas, oblicuas con respecto a los ejes principal del hiperbolóide.

(k) *El hiperbolóide de dos napas.*—Considerando una zona comprendida entre los planos $x=+a$ i $x=-a$, el aspecto jeométrico del cuerpo nos enseña que *la seccion media no existe.* En este caso que puede suceder tambien en otros cuerpos de Simpson se sigue la siguiente.

Regla jeneral;—Cuando para una zona de un cuerpo de Simpson la seccion media no existe, jeometricamente hablando, o lo que es lo mismo, se compone de elementos imajinarios, aljebráicamente hablando, se ejecuta el cálculo, basado en la fórmula $Sz=f(z)$ que se supone conocida, como si la seccion media existiera en realidad.

En el capítulo III bajo (d)3) hemos visto que los semi-ejes B′ i v′ de la seccion elíptica producida por un plano

$$x=+a \text{ o } x=-a,$$

son $$B'=\frac{B}{L}\sqrt{a^2-L^2} \quad \text{i} \quad v'=\frac{v}{L}\sqrt{a^2-L^2}$$

Los semi-ejes B_0 i v_0 de la seccion media imajinaria resultarán haciendo $a=o$ en las espresiones anteriores,

luego $$B_0=\frac{P}{L}\sqrt{-L^2} \quad \text{i} \quad v_0=\frac{v}{L}\sqrt{-L^2},$$

o $$B_0=B\sqrt{-1} \quad \text{i} \quad v_0=v\sqrt{-1},$$

es decir, los semi-ejes de la seccion media son imajinarios.

Para el volúmen de la zona, comprendida entre el plano (z,y) i ~~la~~ seccion $x=+a$, se tiene la espresion:

$$V=\frac{\pi a}{3}(2B_0v_0+B'v'), \quad \text{pero}$$

$$B_0v_0=-Bv \quad \text{i} \quad B'v'=\frac{Bv}{L^2}(a^2-L^2.)$$

Si en vez de la cota a introducimos la sajita s de la seccion $x=a$, se tiene:

$$s=a-L, \text{ o } a=L+s, \quad \text{luego}$$

$$B'v'=\frac{Bv}{L^2}(s^2+2Ls).$$

Introduciendo los valores de a, B_0v_0 i $B'v'$ en la espresion anterior para V, resulta:

$$V=\pi\frac{L+s}{3}\left(-2Bv+\frac{Bv}{L^2}(s^2+2Ls)\right),$$

o $$V=\frac{\pi}{3}.\ \frac{Bv}{L^2}(L+s)(-2L^2+s^2+2Ls);$$

o $$V=\frac{\pi}{3}\ \frac{Bv}{L^2}(-2L^3+3Ls^2+s^3).$$

Para obtener el volúmen del casquete separado por la seccion $x=a$, tenemos que restar de la última espresion el volúmen de la zona imajinaria, comprendida entre el plano (y z) i el plano tanjente $x=L$; este volúmen es por analojía con el elipsóide $=-\frac{2}{3}\pi Bv$.

Por consiguiente, obtenemos para el volúmen del casquete mencionado la fórmula:

$$V=\pi\frac{Bv}{L2}s^2\left(L+\frac{s}{3}\right) \tag{16}$$

i para el volúmen de una zona, compremdida entre dos secciones cuyas sajitas sean s i s' la fórmula:

$$V=\pi\ \frac{Bv}{L^2}\left(s^2\left(L+\frac{s}{3}\right)-s'^2\left(L+\frac{s'}{3}\right)\right) \qquad (17)$$

como se vé estas dos últimas fórmulas se diferencian de las correspondientes (11) i (12) para el elipsóide principalmente en el signo de s.

Si el hiperbolóide es de revolucion en torno del eje de las x, las fórmulas (16) i (17) se modifican, haciendo $B=v$.

(l) *El parabolóide elíptico*—En el capítulo III bajo (d) 4) hemos encontrado que la superficie de una seccion, $X=a$ es $S=\frac{Bv}{L}a$, luego para determinar segun la fórmula de Simpson el volúmen del casquete, separado por esta seccion, tenemos, los elementos siguientes:

$$B=o, \qquad B'=\pi\frac{Bv}{L}a, \qquad M=\pi\frac{Bv}{L}\ \frac{a}{2}\ \text{i}\ h=a=s,$$

por consiguiente:

$$V=\frac{\pi s}{6}\left(\frac{Bv}{L}\ s+\frac{2Bv}{L}\ s\right)$$

o

$$V=\pi\frac{Bv}{2L}\ s^2 \qquad (18)$$

donde $s=a$ representa la sajita del casquete.

Cuando $B=v$, tenemos un parabolóide de revolucion enjendrado por una parábola $y^2=\frac{B^2}{L}\ x=2px$ que jira en torno del eje de las x.

En este caso la fórmnla anterior se convierte en:

$$V=\pi ps^2 \qquad (19)$$

El volúmen de una zona del parabolóide elíptico, comprendida entre dos secciones cuyas sajitas sean s i s', resultará de la fórmula.

$$V = \pi \frac{Bv}{2L}(s^2 - s'^2) \qquad (20)$$

i en el caso del parabolóide de revolucion:

$$V = \pi p\ (s^2 - s'^2). \qquad (21)$$

Si en la fórmula (11) hacemos L = B, resulta

$$V = \pi \frac{B^2}{v^2}\ s^2\ \left(v - \frac{s}{3}\right)$$

como volúmen de un casquete de un elipsóide de revolucion, ejendrado por la elipse $\frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{v^2} = 1$ que jira en torno del eje de las z.

Designando el parámetro de esta elipse por 2p, tenemos $\frac{B^2}{v} = p$, i la fórmula anterior toma esta forma nueva:

$$V = \pi p s^2 - \pi \frac{ps^3}{3v} \qquad (22)$$

i de una manera análoga la fúrmula (16) toma la forma:

$$V = \pi p s^2 + \pi \frac{ps^3}{3L} \qquad (23)$$

Sabido es que, si v i L crecen hasta lo infinito, tanto la elipse que ejendra nuestro elipsóide de revolucion, al cual se refiere la fórmula (22), como la hipérbole que ejendra el hiperbolóide de revolucion de dos napas, al cual se refiere la fórmula (23) se reducen a parábolas, es decir, se debe llegar al caso de la fórmula (10). En efecto, haciendo $v = \infty$ i $L = \infty$, cada una de las fórmulas (22) i (23) se convierten en: $V = \pi ps^2$, idéntico con la fórmula (19).

Si en la fórmula (19), en vez de la sajita s, introducimos el radio r de la base del casquete, tenemos $r^2 = 2ps$, o $s = \frac{r^2}{2p}$, i esta fórmula se convierte en:

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h \tag{24}$$

donde $h = s$ representa la altura del casquete.

La fórmula (24) nos dice que:

El volómen de un casquete, de un parabolóide de revolucion, separado por un plano perpendicular al eje de la parábola que lo ejendra, es igual a la mitad de un cilindro que tiene la misma base i la misma altura.

V. RELACIONES ENTRE LOS ELEMEMTOS QUE ENTRAN EN LA FÓRMULA DE SIMPSON.—Segun la fórmula

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4M),$$

para determinar el volúmen de una zona de un cuerpo de Simpson basta conocer, fuera de la altura h, las suma de sus bases i la seccion media. Nos proponemos en este capítulo comparar, en los distintos cuerpos de Simpson, los valores numéricos de la semi-suma de las bases i de la seccion media.

La lei de formacion de un cuerpo de Simpson sea:

$$Sz = m + nz + qz^2$$

Consideremos una zona, comprendida entre dos planos, cuyas cotas sean z i $z + h$, luego la cota de la seccion media $= z + \frac{h}{2}$.

Los elementos de esta zona son;

$$B = m + nz + qz^2.$$

$$B' = m + n(z + h) + q(z + h)^2$$

$$M = m + n(z + \frac{h}{2} + q(z + \frac{h}{2})^2 ; \quad \text{luego}$$

$$\frac{B + B'}{2} = m + n(z + \frac{h}{2}) + q(z^2 + hz + \frac{h^2}{2}) \quad \text{i}$$

I) $$M - \frac{B + B'}{2} = -q\frac{h^2}{4} , \text{ es decir}$$

La seccion media comparada con la semi-suma de las bases, es mas pequeña o mas grande o igual, segun el coeficiente q sea positivo o negativo o cero.

Para aplicar este resultado a las superficies de segundo grado, designaremos la cota variable siempre por z, obteniendo así segun capítulo III (d):

Para el elipsóide: $Sz = \pi LB - \pi\frac{LB}{v^2}z^2$

Para el hiperbolóide de una napa: $Sz = \pi LB + \pi\frac{LB}{v^2}z^2$.

Para el hiperbolóide de dos napas: $Sz = -\pi Bv + \pi\frac{Bv}{L^2}z^2$.

Para el parabolóide elíptico: $Sz = \pi\frac{Bv}{L}z$.

Es decir tenemos:

en el elipsóide: $q = -\pi\frac{LB}{v^2}$, es decir *negativo* en los dos hiperbolóides: $q = +\pi\frac{LB}{v^2}$ i $+\pi\frac{Bv}{L^2}$, es decir *positivo* en el parabolóide elíptico: $p = o$.

Estos resultados nos dicen que:

En el elipsóide la seccion media es mayor que la semi-suma de las bases, en los dos hiperbolóides es menor i en el parabolóide elíptico los dos valores son iguales.

VI. DEDUCCION DE ALGUNAS FÓRMULAS INTERESANTES.—En este capítulo trataremos solamente de superficies de revolucion. Designando el radio de la seccion media de una zona por Q, luego $M=\pi Q^2$, se deduce de la ecuacion I del capítulo anterior;

$$\text{II)} \qquad B'+B=2\pi Q^2+\frac{1}{2}qh^2$$

i sustituyendo este valor en la fórmula jeneral de Simpson resulta:

$$\text{III)} \qquad V=h(\pi Q^2+\frac{1}{12}qh^2).$$

Sustituyendo los valores de q, obtenidos al final del capítulo anterior, haciendo en el elipsóide e hiperbolóide de una napa $L=B$ i en el hiperbolóide de dos napas i el parabolóide elíptico $v=s$ resulta:

para el elipsóide: $V=\pi h\left(Q^2-\frac{1}{12}\ \frac{B^2}{v2}h'^2\right)$

para el hiperbolóide de una napa: $V=\pi h\left(Q^2+\frac{1}{12}\ \frac{B^2}{v2}h^2\right)$

para el hiperbolóide de dos napas: $V=\pi h\left(Q^2+\frac{1}{12}\ \frac{B^2}{L2}h^2\right)$

para el parabolóide: $V=\pi hQ^2$.

La fórmula para el elipsóide es esplicable a la esfera, haciendo $B=v$, resultando así la siguiente fórmula:

$$V=\pi h\left(Q^2-\frac{1}{12}h^2\right) \quad (1) \qquad (25)$$

donde h significa la altura de la zona esférica i Q el radio de su seccion media.

NOTA: (1) Esta fórmula, de oríjen relativamente moderno, fué publicada por primera vez por el matemático Winckhaus, en la revista matemática de Crelle, año 1844.

Esta fórmula nos revela el siguiente:

Teorema: Los volúmenes de zonas esféricas, que tienen iguales secciones medias i las mismas alturas, son iguales, cualquiera que sea el radio de la esfera respectiva.

Designando los radios de las bases de una zona esférica por Q_1 i Q_2 i el radio de la seccion media como ántes por Q, i teniendo presente que en la esfera es $q = -\pi$, se deduce de la ecuacion II,

$\pi Q_1^2 + \pi Q_2^2 = 2\pi Q^2 - \frac{1}{2}\pi h^2$, o sea la siguiente relacion instructiva:

$$\text{IV)} \qquad Q^2 = \frac{1}{2} Q_1^2 + \frac{1}{2} Q_2^2 + \frac{1}{4} h^2$$

Por medio de esta relacion, la fórmula (25) se puede trasformar en la siguiente:

$$V = \pi \frac{h}{6}(3Q_1^2 + 3Q_2^2 + h^2), \tag{26}$$

que puede servir para calcular el volúmen de una zona esférica, dados los radios de sus bases i su altura.

Haciendo $Q_2 = O$, resulta la siguiente fórmula para calcular el volúmen de un casquete esférico:

$$V = \pi \frac{h}{6}(3Q^2 + h^2), \tag{27}$$

donde h es la altura (sajita) del casquete i Q el radio de su seccion media.

JULIO PFLÜGER.