SOBRE ALGUNOS

PRINCIPIOS ELEMENTALES DE NOMOGRAFÍA

POR

M. M. D'Ocagne

(Tomado de *La Naturaleza* de Madrid, de 28 de Agosto y 8 de Setiembre de 1901)

(Conclusion)

Haremos observar tambien ahora que el empleo de la nomografía, con toda la jeneralidad que convenga, será ausilio utilísimo para llegar a la disposicion mas ventajosa al trazar un ábaco de puntos alineados (*)

7. *Ábacos de cuatro variables.*—Para pasar de los tipos de ábacos de tres variables que acabamos de definir a un tipo de ábacos de cuatro variables, basta evidentemente sustituir uno de los sistemas de elementos de una cota por un sistema de elementos de dos cotas.

Esto nos hace ver desde luego que los elementos de dos cotas contenidos en un ábaco de cuatro variables *sin elemento movible*, serán necesariamente *elementos condensados*. Hemos visto, en efecto, en los números 3 i 4, que para enjendrar en el dominio puntual elementos de dos cotas no condensados, es necesario recurrir a elementos movibles.

En el número 2 se demuestra, es verdad, que en el dominio tanjencial es posible representar en el ábaco elementos de dos cotas diferentes cuando estos elementos se reducen a puntos; pero resulta del número 6 que la lectura de un ábaco tanjencial exije el empleo de un índice movible. La afirmacion que antecede está, por lo tanto, bien justificada.

Considerando de nuevo el tipo jeneral de ábacos puntuales de tres variables (nú-

---

(*) *T. N.* Números 60 i 62. En el número 84 se da cuenta de un ejemplo de aplicacion verdadera mente notable.

mero 5), si reemplazamos en él uno de los sistemas de líneas de una cota por un sistema de líneas condensadas de dos cotas, la ecuacion así representada será de la forma

$$F[\alpha_1, \alpha_2 \, \theta(\alpha_3, \alpha_4)] = 0,$$

i puede tambien escribirse así:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \theta(\alpha_3, \alpha_4).$$

Como en la representacion de una ecuacion de tres variables, se pueden elejir arbitrariamente dos sistemas de líneas acotadas, podremos, en particular, escojer para el que ha de convertirse en sistema condensado de dos cotas, un sistema de rectas paralelas.

Puede decirse, segun esto, que toda ecuacion de cuatro variables perteneciente al tipo indicado mas arriba, puede ser representada por medio de un sistema de líneas de una cota trazadas sobre una cuadrícula formada por un sistema de paralelas de una cota i un sistema de paralelas condensadas de dos cotas, es decir, una escala binaria.

Para llegar a una manera mas jeneral de representacion de ecuaciones de cuatro variables, es preciso recurrir a aquellos elementos *distintos* (núm. 4) de dos cotas, cuyo empleo se ha reconocido ya como posible, i mas especialmente a las rectas de dos cotas.

Consideremos, pues, el ábaco mas jeneral constituido por dos sistemas de líneas de una cota

$$F_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$

$$F_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$

i un sistema de rectas distintas de dos cotas.

$$xf(\alpha_3, \alpha_4) + y\varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

El resultado de la eliminacion de x e y entre estas tres ecuaciones será de la forma

$$\theta(\alpha_1, \alpha_2) f(\alpha_3, \alpha_4) + \chi(\alpha_1, \alpha_2)\, \varphi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0$$

Tal es el tipo de una ecuacion representable en esta forma. Es mui de notar que la mayor parte de las ecuaciones de cuatro variables que se encuentran en la práctica, pueden asimilarse a este tipo.

El ábaco correspondiente comprenderá, segun se ve, cuatro sistemas de elementos de una cota (α_1), (α_2), (α_3) i (α_4); los dos últimos constituirán las dobles envolventes de las rectas de dos cotas (α_3, α_4), i la manera de usar este ábaco se desprende del siguiente enunciado: *La tanjente comun a las curvas acotadas* α_3 i α_4 *pasa por el punto de interseccion de las curvas acotadas* α_1 i α_2.

Este enunciado puede formularse del modo siguiente: *La recta de dos cotas* (α_3, α_4) *pasa por el punto de dos cotas* (α_1, α_2) I bajo esta forma se ve claramente que la trasformacion correlativa de un ábaco así trazado, producirá un ábaco del mismo tipo. Es por otra parte, evidente que si queremos realizar esta misma estension en un ábaco tanjencial, lo cual se conseguiria por medio de las mismas ecuaciones, reemplazando en ellas x e y por u i v—llegaremos al mismo resultado, con la sola diferencia de que entónces el elemento (α_3, α_4) será un punto, i el elemento (α_1, α_2) una recta.

El caso mas interesante en la práctica es aquel en que las envolventes (α_1) i (α_2) de las rectas de dos cotas (α_1, α_2) se reducen a puntos, es decir, el caso en que en un ábaco de puntos alineados (núm. 6), uno de los sistemas de puntos se trasforma en un sistema de puntos de dos cotas (fig. 4). En este caso, las ecuaciones de los puntos de una cota (α_1) i (α_2) son, en coordenadas paralelas,

$$u f_1(\alpha_1)+v\varphi_1(\alpha_1)+\psi_1(\alpha_1)=0,$$

$$u f_2(\alpha_2)+v\varphi_2(\alpha_2)+\psi_2(\alpha_2)=0;$$

las de los puntos de dos cotas

$$u f(\alpha_3, \alpha_4)+v\varphi(\alpha_3, \alpha_4)+\psi(\alpha_3, \alpha_4)=0,$$

i la ecuacion representada es de la forma

$$(\varepsilon) \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f(\alpha_3, \alpha_4) & \varphi(\alpha_3,\alpha_4) & \psi(\alpha_3, \alpha_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Las ecuaciones de este tipo que con mas frecuencia se encuentran en la práctica, son las que pueden escribirse así:

$$(\varepsilon') \qquad f_1(\alpha_1) f(\alpha_3, \alpha_4)+\varphi_2(\alpha_2)\varphi(\alpha_3, \alpha_4)+\varphi(\alpha_3, \alpha_4)=0;$$

es decir, teniendo en cuenta lo dicho en el número 6, las que espresan la alineacion de los puntos.

$$(\alpha_1) \qquad \begin{cases} x=-l, \\ y=f_1(\alpha_1), \end{cases}$$

$$(\alpha_2) \qquad \begin{cases} x=l, \\ y=\varphi_2(\alpha_2), \end{cases}$$

$$(\alpha_3, \alpha_4) \qquad \begin{cases} x=l\,\dfrac{\varphi(\alpha_3, \alpha_4)-f(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4)+f(\alpha_3, \alpha_4)}. \\[2ex] y=\dfrac{-\psi(\alpha_3, \alpha_4)}{\varphi(\alpha_3, \alpha_4)+f(\alpha_3, \alpha_4)}. \end{cases}$$

Por otra parte, para formar las ecuaciones de los dos sistemas de líneas de un cota (α_3) i (α_4), cuyo conjunto constituye la red (α_3, α_4), basta eliminar sucesivamente α_4 i α_3 entre las dos ecuaciones últimamente escritas.

El ábaco comprende entónces, ademas de los puntos de una cota (α_1) i (α_2), estos dos sistemas de líneas de una cota, i la manera de usarlo se deduce del siguiente enunciado: *La línea que une los puntos acotados* α_1 *i* α_2, *pasa por el punto de interseccion de las curvas acotadas* α_3 *i* α_4.

Observacion.—Nos limitaremos aquí a las ecuaciones de cuatro variables; pero es claro que se obtendrian inmediatamente procedimientos de representacion aplicables a cinco o seis variables, reemplazando, no uno solo de los sistemas de elementos de una cota, sino dos de entre ellos, o aun los tres, por sistemas de elementos de dos cotas. Aquí es donde mas claras aparecen las ventajas de los ábacos tanjenciales sobre los ábacos puntuales. En efecto: si en un ábaco constituido por el cruzamiento de tres sistemas de rectas de una cota, reemplazamos cada uno de éstos por un sistema de rectas de dos cotas, necesitaremos para leer en él hacer uso de *tres rectas movibles* independientes, lo cual es evidentemente poco práctico; en cambio, si reemplazamos en un ábaco de puntos alineados cada uno de los sistemas de puntos de una cota por un sistema de puntos de dos cotas, bastará siempre *una sola recta movible* para verificar la lectura.

III.—Aplicacion a la resolucion nomográfica de las ecuaciones aljébricas

8. *Formas normales de las ecuaciones aljébricas.*—Las raices de una ecuacion del grado n en z dependen de los n coeficientes de esta ecuacion. Será, pues, preciso para resolver nomográficamente esta ecuacion en el caso jeneral, es decir, suponiendo que se atribuyan a sus coeficientes valores cualesquiera, considerarla como enlazando entre ellas $n+1$ variables, que son de una parte la incógnita z, i de la otra los n coeficientes. Pero segun se sabe, es posible—por medio de trasformaciones que sólo exijen la resolucion accesoria de ecuaciones de primero o de segundo grado—reducir las ecuaciones de un grado dado a ciertos tipos canónicos que contienen un número mas pequeño de coeficientes. El ejemplo mas sencillo i mas clásico es el de la ecuacion de tercer grado.

$$x^3 + n\,x^2 + p\,x + q = 0,$$

la cual, por la trasformacion

$$x' = x - \frac{n}{3},$$

se obtiene en la forma reducida

$$x'^3 + p'\,x' + q' = 0$$

La mas importante entre las trasformaciones de este jénero, es la de Tschirnhausen por medio de la cual Bring, Jerrard, Brioschi i M. Klein han obtenido para la ecuacion de quinto grado varias formas normales que dependen de un solo parámetro (*). Esta trasformacion permite, especialmente, reducir cualquier ecuacion de sétimo grado a la forma normal

$$z^7 + \lambda z^3 + \mu z^2 + \nu z + 1 = 0$$

que no contiene mas que la incógnita z i los parámetros λ, μ, ν; es decir, que constituye desde el punto de vista que nos ocupa, una ecuacion de cuatro variables.

En jeneral, toda ecuacion aljébrica reductible, por el empleo de las trasformaciones a que acabamos de referirnos, a una forma normal que sólo contenga dos o tres parámetros, puede escribirse, sea

$$(I) \qquad Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 = 0,$$

sea

$$(II) \qquad Z_1 + \lambda Z_2 + \mu Z_3 + \nu Z_4 = 0,$$

siendo Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4 polinomios en Z de coeficientes numéricos.

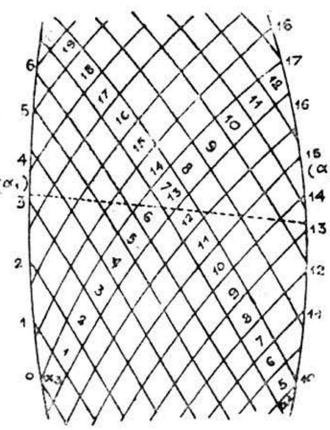

Fig. 4.

Basta, pues, mostrar cómo los principios nomográficos estudiados mas arriba se aplican a estos tipos de ecuaciones de tres y cuatro variables respectivamente, para que el ábaco obtenido dé una solucion completa de las ecuaciones correspondientes, aplicando primero a éstas las trasformaciones necesarias para reducirla a la forma normal considerada, las cuales, a su vez, pueden fácilmente traducirse en ábacos.

9. *Ecuaciones del tipo* (I).—Si hacemos corresponder las variables λ, μ i z respectivamente, con α_1, α_2 i α_3, veremos en seguida que la ecuacion *(I)* corresponde al tipo *(E''')* del número 5, i, por consiguiente, espresa, segun se desprende de lo dicho en el número 6, que los tres puntos

$$(\lambda) \qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = \lambda, \end{cases}$$

$$(\mu) \qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \mu, \end{cases}$$

(*) Véase *Traité d'Algèbre supérieure*, de M. Weber, traducido por M. J. Griess, cap. VI.

$$(z)\qquad \begin{cases} x = l\dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \\[2ex] y = \dfrac{-Z_1}{Z_3 + Z_2} \end{cases}$$

han de estar alineados.

Los puntos (λ) i (μ) forman dos escalas regulares cuyos soportes son líneas paralelas al eje Oy; los puntos (z) están distribuidos sobre una curva, cuya ecuacion se obtendrá si se quiere, eliminando z entre las dos últimas ecuaciones.

Observemos, por otra parte, de un modo jeneral, que podemos limitarnos siempre en la construccion del ábaco, a los puntos que corresponden a valores positivos de z, porque los valores negativos pueden obtenerse como raices positivas de la trasformada en $-z$.

Entran inmediatamente en el tipo *(I)* la ecuacion jeneral de segundo grado, para la cual.

$$Z_1 = z^2,\quad Z_2 = z,\quad Z_3 = 1,$$

i la ecuacion reducida de tercer grado, para la cual

$$Z_1 = z^3,\quad Z_2 = z,\quad Z_3 = 1.$$

Los ábacos correspondientes, cuya construccion se ha estudiado en detalle en los números 79 i 81 del *T. N.*, están representados a la vez en la figura 80 de esta obra.

10. *Ecuaciones del tipo* (II). — De la misma manera, si hacemos corresponder las variables λ, μ, ν i z respectivamente, con α_1, α_2, α_3 i α_4, veremos que la ecuacion *(II)* corresponde al tipo *(E')* del número 7, i, por consiguiente, que los puntos

$$(\lambda)\qquad \begin{cases} x = -l, \\ y = \mu, \end{cases}$$

$$(\mu)\qquad \begin{cases} x = l, \\ y = \lambda, \end{cases}$$

$$(\nu, z)\qquad \begin{cases} x = l\dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \\[2ex] y = -\dfrac{Z_1 + \nu Z_4}{Z_3 + Z}, \end{cases}$$

han de estar alineados.

Los puntos (λ) i (μ) son los mismos que anteriormente. En cuanto a los puntos

(ν, z)—puesto que su x no contiene el parámetro ν,—estarán dados por una red en la cual los elementos z son rectas paralelas al eje Oy. Las curvas (ν), que en union de estas rectas constituyen la red (ν, z), pueden considerarse como definidas por las dos últimas ecuaciones, tomando en ellas a z como parámetro de construccion.

Se obtiene, como caso particular, por este procedimiento el ábaco de la ecuacion jeneral del tercer grado, haciendo

$$Z_1 = z^3, \quad Z_2 = z^2, \quad Z_3 = z, \quad Z_4 = 1.$$

El ábaco así obtenido, i estudiado con minuciosidad en el número 125 del *T. N.*, está representado en la figura 149 de esta obra.

En la ecuacion de cuarto grado podremos, por medio de una trasformacion lineal, hacer que el coeficiente del término en z_3 valga cero o uno. En el segundo caso, por ejemplo, el ábaco se obtiene poniendo

$$Z_1 = z^4 + Z^3, \quad Z_2 = Z^2, \quad Z_3 = z, \quad Z_4 = 1.$$

El ábaco correspondiente estudiado en el número 126 del *T. N.*, está representado en la figura 150 de esta obra. I la trasformacion lineal que reduce una ecuacion cualquiera de cuarto grado a esta forma, está traducida en ábaco en la figura 151.

El método de resolucion nomográfica aquí considerado se estiende hasta la ecuacion de sétimo grado puesta, gracias a la trasformacion de Tschirnhausen, bajo la forma indicada en el número 8. Basta, en efecto, poner

$$Z_1 = z^7 + 1; \quad Z_2 = z^3, \quad Z_3 = z^2, \quad Z_4 = z$$

Este ejemplo pone claramente de manifiesto el interes que hai en introducir elementos movibles en los ábacos. De no recurrir a ellos, será necesario, para obtener ábacos de mas de tres variables, emplear sistemas de elementos *condensados* de dos cotas. Resulta de lo dicho en el número 3, que en este caso la resolucion de la ecuacion propuesta ha de reducirse a una serie de operaciones de dos parámetros; pero, segun M. Hilbert, es de creer que podria demostrarse la imposibilidad de esta reduccion en una ecuacion del grado sétimo; i se ve cómo, por el contrario, la resolucion nomográfica de esta ecuacion se hace facilísima introduciendo en el ábaco una sola recta movible.