

MOMENTOS DE FLEXION EN LAS VIGAS SOBRE DOS APOYOS

POR MANUEL TRUCCO I FRANCISCO MARDONES

Los momentos de flexion que se desarrollan en las vigas de los puentes de ferrocarril son orijinados (aparte de los que provienen de la carga permanente), por la accion de un tren móvil de fuerzas aisladas.

Para determinar la cantidad de material de que deben ser constituidas las diversas secciones de las cabezas de tales vigas, lo mas racional, por ser lo que mas se aproxima a la realidad, es establecer los cálculos de resistencia correspondientes, considerando ese sistema de fuerzas móviles colocado en las posiciones que orijinen los esfuerzos máximos de flexion.

Pero los cálculos a que da lugar la consideracion del tren real de fuerzas en sus posiciones mas desfavorables, son laboriosos i complicados; i solo por simplificar tales operaciones se ha imaginado sustituir el sistema efectivo de fuerzas aisladas por una sobrecarga uniformemente repartida «equivalente».

Cualesquiera que sean las hipótesis que se adopten para fijar esa sobrecarga uniformemente repartida, la curva representativa de los momentos de flexion que ella orijina no se confunde con el lugar de los momentos desarrollados por el sistema de fuerzas concentradas; i en consecuencia la sustitucion de dicho tren de fuerzas por una sobrecarga uniformemente repartida conduce a una insuficiencia o a un exceso de metal en algunas secciones.

Para poder determinar los esfuerzos efectivos, evitando así los inconvenientes señalados, hai, pues, interés en simplificar los cálculos a que da lugar la consideracion del tren de fuerzas aisladas, que es lo que se ha hecho en otros paises para sus trenes tipos respectivos. Así, por ejemplo, para el tren tipo frances, existen cuadros numéricos calculados por el inspector jeneral Mr. E. Henry que facilitan notablemente las aplicaciones, i que en la práctica resultan de uso mui sencillo.

Hemos creido útil aplicar al tren tipo chileno los mismos métodos de que Mr. Henry se ha servido para formar los citados cuadros, tarea en la cual el señor Trucco se habia empeñado hace algun tiempo, i cuyos resultados se publicarán en los ANALES.

Posteriormente, dado el probable incremento en el peso de los trenes efectivos, ha surjido la necesidad de revisar el actual cuaderno de «cláusulas i condiciones jenerales

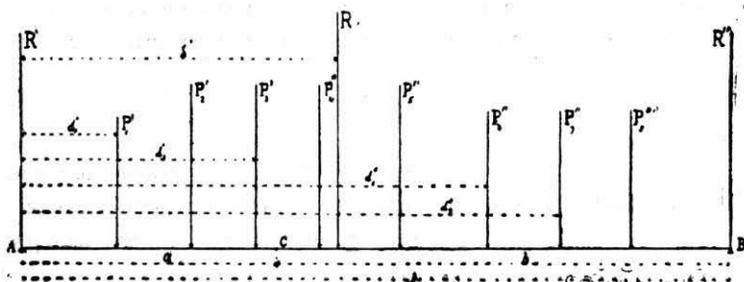
para el cálculo i construcción de puentes de ferrocarril», (*) i se ha debido, naturalmente, hacer el estudio de los trenes tipos de los diversos países, i su comparación con los trenes efectivos correspondientes.

Coadyuvando a este propósito el señor Mardones, ha aplicado un método diverso del anterior para investigar el valor de los momentos de flexión máximos desarrollados en las diversas secciones de un puente ferroviario bajo la acción de un tren dado de fuerzas; método que se espondrá aplicándolo al tren mas desfavorable en actual circulación en los Ferrocarriles del Estado de Chile.

Uno i otro método tienen por base el siguiente:

TEOREMA. — *En una viga sobre dos apoyos, solicitada por un tren móvil de n fuerzas aisladas, el momento máximo en una sección cualquiera se desarrolla cuando «cierta» fuerza está a plomo de la sección.*

Supongamos el sistema en una posición cualquiera, tal como en la figura 1, i sean



C, la sección considerada.

P' , las fuerzas a la izquierda de C.

P'' , las fuerzas a la derecha de C.

d' , las distancias de las fuerzas P' al apoyo A de la izquierda.

d'' , las distancias de las fuerzas P'' al apoyo A de la izquierda.

R , la resultante del sistema, $= \sum P$.

δ' , la distancia de R al apoyo A.

R' i R'' , las reacciones en A i B.

Considerando el trozo de la izquierda AC, tenemos, para esa primera posición:

$$M'_c = R a - \sum P' (a - d') = R' a - a \sum P' + \sum P' d'$$

La reacción R' tiene por valor:

$$R' = \frac{R (1 - \delta')}{1}$$

En consecuencia:

$$M'_c = R a - a \sum P' - \frac{R a \delta'}{1} + \sum P' d'$$

(*) Por iniciativa del señor Director Jeneral de Obras Públicas don Carlos Koning, se ha constituido una comisión, que él mismo preside, i de la cual forman parte los ingenieros de aquella oficina, señores José Echeverría i Víctor Leon, i los ingenieros señores Estanislao Pardo D. i Francisco Mardones, de la sección de Puentes del Departamento de la Vía i Edificios de los Ferrocarriles del Estado, con el objeto de estudiar un nuevo cuaderno de «Cláusulas i condiciones para el cálculo i construcción de puentes de ferrocarril.»

Si ahora hacemos avanzar el tren hácia el apoyo *A* en una cantidad *q*, las distancias *d'* i *s'* disminuirán en esa cantidad *q*, i el momento de flexion en *C* tomará el valor:

$$M''_c = Ra - a \sum P' - \frac{Ra(\delta' - q)}{l} + \sum P'(d' - q)$$

o sea

$$M''_c = M'_c + \frac{Ra q}{l} - q \sum P'$$

La variacion esperimentada por el momento de flexion en *C*, a consecuencia del desplazamiento del tren, es pues:

$$\Delta M = \frac{q}{l}(Ra - l \sum P')$$

Considerando, como lo hemos hecho, el trozo de la izquierda *AC*, los momentos son positivos; luego, para que la traslacion del sistema produzca un aumento en el valor de los momentos, es necesario que el valor de ΔM sea positivo; es decir, debe tenerse:

$$\sum P' < \frac{a}{l} \sum P \tag{1}$$

En otros términos; miéntràs subsista la condicion (1) es posible aumentar el valor del momento en la seccion considerada haciendo avanzar el tren hácia la izquierda: *el momento máximo en una seccion C corresponde, pues, a la mas avanzada posicion del sistema hácia el apoyo A, compatible con la condicion (1).*

De lo anterior se deduce inmediatamente que *la posicion del sistema que produce el momento máximo en una seccion C, se obtiene colocando a plomo de dicha seccion cierta fuerza P_m , tal, que la suma de las fuerzas que queden a su izquierda realice la condicion (1) i, que si se hace pasar tambien P_m a la izquierda de C, se verifique*

$$\sum P' + P_m > \frac{a}{l} \sum P \tag{2}$$

Observaciones: I. - Si se obtuviera:

$$\sum P' + P_m = \frac{a}{l} \sum P$$

el incremento ΔM seria nulo; lo que indicaria que hai dos fuerzas vecinas que desarrollan en *C* el mismo momento máximo.

II.—Las consideraciones espuestas son aplicables a un sistema determinado de fuerzas. Cuando, como es el caso en los puentes de ferrocarril, el sistema es ilimitado i las fuerzas que lo componen tienen valores i distribuciones variadas, los momentos máximos para el sistema compuesto de un cierto número de esas fuerzas, pueden muy bien ser inferiores a los que se obtendrian cuando se modificara el sistema haciendo entrar nuevas fuerzas por la derecha, o salir otras por la izquierda, o ámbas cosas a la vez.

TREN EFECTIVO

Como lo hemos espresado anteriormente, el presente trabajo ha tenido como orfjen la necesidad de estudiar el tren mas desfavorable en actual circulacion en los Ferrocarriles del Estado i compararlo, bajo el punto de vista del cálculo de los puentes, con el tren tipo en vijencia.

Aquel mismo tren será, sin duda, el que deberá tomarse como tren de prueba en la recepcion de los puentes, i los cuadros que daremos podrán utilizarse, ademas, al hacer la comparacion entre los resultados que proporcione la verificacion espermental i los que indique el cálculo.

El tren mas desfavorable que puede componerse con el material rodante en actual circulacion en los FF. CC. del Estado, se forma: con dos locomotoras Baldwin con cuatro ejes acoplados del tipo «Consolidada», que llevan los números 277 a 282, i una serie de carros cajon, de acero, del tipo Belga.

Está demas explicar que si no hemos recurrido a la formacion de cuadros análogos a los que Mr. Henry ha confeccionado para el tren tipo frances i a los cuales nos hemos referido, estimándolos de uso mui espedito, ha sido porque dichos cuadros no son directamente utilizables para investigar el valor del momento máximo maximórum, que es el que particularmente nos ha interesado en la investigacion en que, como miembro de la referida comision, hemos estado empeñado.

Por otra parte, debiendo hacerse la investigacion para un cierto número de trenes, de diversos paises, nos ha interesado la aplicacion de un método que reduzca al mínimun posible el trabajo i el tiempo empleado en ejecutarlo. I es esta consideracion, especialmente, la que nos ha conducido a hacer abstraccion de los diversos procedimientos en uso, tanto analíticos como gráficos, i a emplear el que pasamos a esponer.

Momento máximo en una seccion cualquiera

Sean:

C, la seccion considera;

d , la distancia del primer eje al apoyo de la izquierda.

P' , las fuerzas a la izquierda de C.

P'' las fuerzas a la derecha de C.

$\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, las distancias de los ejes sucesivos al eje P_1 .

ΣP , la suma de las fuerzas sobre la viga.

$\Sigma P'$, la suma de las fuerzas a la izquierda de C.

$\Sigma P\Delta$, la suma de los momentos de las fuerzas sobre la viga con respecto a P_1 .

$\Sigma P'\Delta'$, la suma de los momentos de las fuerzas situadas a la izquierda de c con respecto P

El momento de flexion en C tiene por valor:

$$M_c = R'a - \Sigma P' (a - \delta)$$

El valor de la reaccion R' es:

$$R' = \frac{\Sigma P(1-a-\delta)}{l}$$

En consecuencia:

$$M_c = a\Sigma P - \frac{aa\Sigma P}{l} - \frac{a\Sigma P\Delta}{l} - a\Sigma P' + a\Sigma P' + \Sigma P'\Delta'$$

O sea:

$$M_c = a\Sigma P + \Sigma P'\Delta' - \left[(a-a)\Sigma P' + a\frac{\Sigma P\Delta + a\Sigma P}{l} \right] \quad (3)$$

Hemos visto anteriormente que para tener el momento máximo en una seccion dada, para un sistema determinado de fuerzas, es necesario colocar a plomo de dicha seccion cierta fuerza P_m tal, que se verifiquen simultáneamente las condiciones:

$$\Sigma P' < \frac{a}{l} \Sigma P \quad (1)$$

$$\Sigma P' + P_m > \frac{a}{l} \Sigma P. \quad (2)$$

Ahora bien, como el tren de fuerzas es ilimitado, habrá, por lo jeneral, varios ejes que satisfagan las condiciones (1) i (2), i será necesario determinar: 1.º cuáles son estos ejes, i 2.º cuál de estos es el que colocado a plomo de la seccion desarrolla el momento de flexion máximo.

Para conseguir este objeto hemos dispuesto el cuadro A de la lámina 1.

Este cuadro contiene (**):

1.º La distribucion de los ejes i sus pesos respectivos para el tren considerado.

2.º Veinte columnas horizontales que corresponden a la colocacion de los veinte primeros ejes a plomo de las secciones que se consideren. En cada columna horizontal se ha inscrito las abcisas de los ejes de la derecha i de la izquierda referidas al eje de que se trata, i la suma de las cargas correspondientes, incluyendo el eje considerado en las cargas de la derecha.

Para la mayor facilidad de comprension, indicaremos con un ejemplo numérico el modo de utilizar este cuadro.

Sea una viga de 45 m. de luz i supongamos que se trata de determinar el momento de flexion máximo en la seccion de abcisa 9 m.

Tendremos:

$$a = 9_m \quad b = 36_m \frac{a}{l} = \frac{1}{5}$$

Con estas cifras entramos al cuadro A i allí averiguamos, colocando los ejes sucesivos a plomo de la seccion considerada, que de los diversos sistemas posibles sobre la viga, los únicos que satisfacen las condiciones (1) i (2) son los que se indican en el cuadro B.

(**) Este cuadro es análogo a los que ha construido von Leber para la determinacion de los momentos al $\frac{1}{2}$ i al $\frac{1}{3}$ de un tramo; i que pueden consultarse en el *Bulletin du Congrès des chemins de fer.* —Vol. XIV.

CUADRO B

	$P_n' - P_m - P_n$	$\Sigma P'$	$\frac{a}{l} \Sigma P$	$\Sigma P' + P_m$	ΣP	a	M_c
I	1— 4—18	33530	44260	47070	221300	3,87	940033,32
II	5— 8—22	39300	43966	52180	219830	1,43	895755,28
III	6— 9—23	38640	43554	45090	217770	2,48	869324,16
IV	6—10—24	45090	45818	58630	229090	0,14	868853,28
V	13—16—29	39300	40072	52180	200360	1,43	730565,04
VI	14—17—30	38640	39648	50040	198240	2,66	715461,36
VII	17—20—33	34200	38760	45600	193800	0,42	678376,40

Observando que $\Sigma P = \Sigma P' + \Sigma P''$ i que $l - a = b$, las condiciones (1) i (2) se transforman en estas otras:

$$\Sigma P' > \frac{a}{b} \Sigma P > \Sigma P' + P_m \quad (4)$$

El cuadro A permite utilizar la condicion (4) en lugar de las (1) o (2), entrando con los valores:

$$a, b \text{ i } \frac{a}{b}$$

Resta solo calcular el valor del momento a plomo de la seccion considerada para cada uno de estos sistemas. El mayor de los valores que resulten será el del momento de flexion máximo que puede desarrollarse a plomo de dicha seccion. Como estos cálculos deben efectuarse repetidas veces para las varias secciones elejidas de antemano sobre la viga, conviene pensar en simplificarlos en cuanto sea posible.

Persiguiendo este propósito hemos escrito la ecuacion de momentos en la forma (3) i hemos calculado el cuadro C en el cual se encuentran los valores de:

P , fuerzas sucesivas del tren.

ΣP , la suma de estas fuerzas.

d , distancias entre ellas.

δ , distancias acumuladas con respecto al eje P_1 .

$P\delta$, el momento de cada fuerza con respecto al punto de aplicacion de P_1 .

$\Sigma P\Delta$, suma de los momentos anteriores.

D , distancia a P_1 de la línea de accion de la resultante del sistema.

Este cuadro queda directamente aplicable para el caso en que el primer eje del sistema sobre la viga sea P_1 . En el caso contrario, se tendrá cuidado, al aplicar la fórmula (3) de tomar como valor de a la distancia del primer eje sobre la viga al apoyo de la izquierda, i de introducir los valores efectivos de ΣP , $\Sigma P'$, $\Sigma P\Delta$ i $\Sigma P'\Delta'$

Así, si el sistema sobre la viga es: $P_n' - P_m - P_n$ construiremos la fórmula (3) con los siguientes valores:

CUADRO C

Eje	P	SP	d	e	P. 2	SP A	D
1	6450	19990	1447	2.34	31683.6	31683.6	1.585
2	13540	33530	1447	1.32	31587.4	33271.0	2.483
3	13540	47070	1447	3.81	69460.2	83271.0	3.245
4	13540	47070	1447	5.13	89364.0	152731.2	3.994
5	13540	60610	1447	6.60	138202.4	242095.2	5.17
6	12880	73490	1417	10.73	160356.0	380297.6	6.26
7	12880	86370	1417	12.45	540633.6	540633.6	7.288
8	6450	105700	3.08	14.17	182509.6	723163.2	7.894
9	6450	105700	2.34	17.25	111262.5	834425.7	9.222
10	13540	119240	1447	19.39	265248.6	1099674.3	10.43
11	13540	132780	1447	21.06	285152.4	1384826.7	10.43
12	13540	146320	1447	22.38	303025.2	1687851.9	11.526
13	13540	159860	4.13	23.85	322929.0	2010780.9	12.578
14	12880	172740	4.13	27.98	360382.4	2371163.3	14.835
15	12880	185620	1.72	29.70	382336.0	2733699.3	14.835
16	12880	198500	1.72	31.42	404689.6	3153388.9	15.912
17	11400	209900	2.90	34.32	391248.0	3549636.9	16.912
18	11400	221300	3.84	35.84	408576.0	3958212.9	17.886
19	11400	232700	5.34	41.38	471732.0	4919944.9	19.037
20	11400	244100	1.52	42.90	489060.0	4919004.9	20.152
21	11400	255500	2.35	43.25	513950.0	5434854.9	21.271
22	11400	266900	5.34	46.77	533178.0	5968032.9	22.361
23	11400	278300	1.52	52.31	596334.0	6564366.9	23.515
24	11400	289700	2.35	53.83	613862.0	7180288.9	24.784
25	11400	301100	1.52	56.18	640452.0	7818480.9	25.966
26	11400	312500	1.52	57.70	657780.0	8476260.9	27.125
27	11400	323900	5.34	63.24	720936.0	9197196.9	28.518
28	11400	335300	2.35	64.76	738264.0	9935460.9	29.632
29	11400	346700	1.52	67.11	765034.0	10698514.9	30.858
30	11400	358100	5.34	68.63	782382.0	11480896.9	32.061
31	11400	369500	1.52	74.17	845533.0	12326434.9	33.360
32	11400	380900	1.52	75.69	862866.0	13189300.9	34.627
33	11400	392300	2.35	78.04	889656.0	14078956.9	35.888
34	11400	403700	5.34	79.56	906984.0	14985940.9	37.122
35	11400	415100	1.52	85.10	970140.0	15956080.9	38.439
36	11400	426500	1.52	86.62	997468.0	16943548.9	39.427
37	11400	437900	2.35	88.97	1014258.0	17957806.9	41.009
38	11400	449300	5.34	90.49	1031586.0	18989392.9	42.264
39	11400	460700	1.52	96.03	1094742.0	20084134.9	43.395
40	11400	472100	1.52	97.55	1112070.0	21196204.9	44.898
41	11400	483500	2.35	99.90	1138860.0	22335064.9	46.195
42	11400	494900	1.52	101.42	1156188.0	23491252.9	47.487
43	11400	506300	5.34	106.96	1219344.0	24717036.9	48.806
44	6450	517700	2.34	108.48	1236672.0	25947268.9	50.120

1.ª locomt. Tender 2.ª locom. Tender 1.ª carro 2.ª carro 3.ª carro 4.ª carro 5.ª carro 6.ª carro 7.ª carro

a , distancia de P_n' al apoyo de la izquierda $= (a - \delta_m - \delta_n')$

$$\Sigma P = \sum_1^n P - \sum_1^{n'-1} P$$

$$\Sigma P' = \sum_1^{m-1} P' - \sum_1^{n'-1} P'$$

$$\Sigma P \Delta = \sum_1^n P \Delta - \sum_1^{n'-1} P \Delta - \delta \sum_{n'}^n P$$

$$\Sigma P' \Delta' = \sum_1^{m-1} P' \Delta' - \sum_1^{n'-1} P' \Delta' - \delta \sum_{n'}^{m-1} P'$$

Si, por otra parte, observamos que:

$$\Sigma P \Delta = D \Sigma P \text{ i } \Sigma P' \Delta' = D' \Sigma P'$$

podemos escribir la ecuacion (3) en esta otra forma:

$$M = \frac{a}{l} (l - a - D) \Sigma P - (a - a - D') \Sigma P'$$

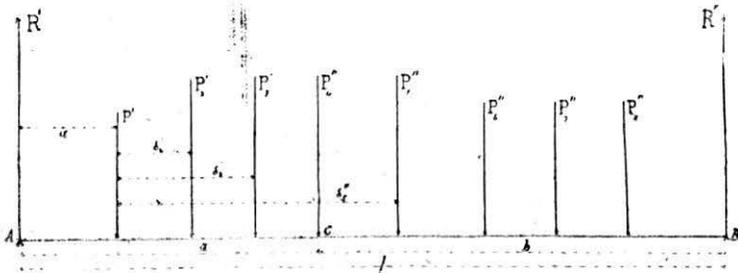
Como para los sistemas que empiezan por P_1 el cuadro C da los valores de D i D' se vé que para dichos sistemas los cálculos son mas sencillos si se aplica la fórmula (3) en esta nueva fórmula.

MOMENTO DE FLEXION MÁXIMUM MAXIMORUM

Establezcamos ante todo, el siguiente:

TEOREMA.—*En una viga sobre dos apoyos solicitada por un tren móvil de n fuerzas aisladas, el momento máximo maximorum se desarrolla a plomo de «cierta» fuerza cuando el sistema está colocado de tal manera que el punto medio de la viga dividia el espacio que la separa de la línea de accion de la resultante.*

El momento en el punto de aplicacion de una fuerza P_m de abscisa x es: (Fig. 2)



$$M' = x \Sigma P + \Sigma P' \Delta' - \left[(x - a) \Sigma P' + x \frac{\Sigma P \Delta + a \Sigma P}{l} \right] \tag{4}$$

Si llamamos k la distancia del centro de gravedad del sistema a la fuerza P_m que se considera y la diferencia $(x-a)$ que es constante para cada fuerza; i si observamos que:

$$\frac{\Sigma P\Delta + a \Sigma P}{l} = R'' = \frac{x \pm k}{l} \Sigma P$$

podremos escribir:

$$M' = x\Sigma P + \Sigma P'\Delta' - \left[\gamma\Sigma P' + x \frac{(x \pm k) \Sigma P}{l} \right]$$

El valor de x que hace máxima esta expresion, resulta de escribir:

$$\frac{dM}{dx} = \Sigma P - \frac{2x\Sigma P \pm k\Sigma P}{l} = 0$$

de donde:

$$x = \frac{l}{2} \pm \frac{K}{2} \quad (5)$$

Ahora bien, en un punto situado a una distancia β , a la izquierda del eje considerado, el valor del momento es:

$$M'' = (x-\beta)\Sigma P + \Sigma P'\Delta' - \left[(x-a-\beta)\Sigma P' + (x-\beta) \frac{\Sigma P\Delta + a\Sigma P}{l} \right]$$

o sea:

$$M'' = M' + \beta \left[\Sigma P' - \left(\Sigma P' - \frac{\Sigma P\Delta + a\Sigma P}{l} \right) \right]$$

Observando que:

$$\Sigma P - \frac{\Sigma P\Delta + a\Sigma P}{l} = R' = \frac{l \pm k}{2l} \Sigma P \quad (*)$$

podemos escribir que la variacion experimentada por el valor del momento es:

$$\Delta M = \beta \left[\Sigma P' - \frac{l \pm k}{2l} \Sigma P \right]$$

Considerando, como lo hemos hecho, el trozo de la izquierda, los momentos son positivos; luego para que el momento M' sea mayor que M'' es necesario que ΔM sea negativo, es decir que:

$$\Sigma P' < \frac{l \pm k}{2l} \Sigma P \quad (6)$$

De la misma manera, en un punto situado a una distancia β a la derecha de P_m el momento es:

(*) El doble signo de k proviene de la colocacion de la resultante con respecto al punto medio de la viga: (+) si está a la izquierda i (-) si está a la derecha.

$$M'' = M' + \beta \left[\frac{l \pm k}{2l} \Sigma P - (\Sigma P + P_m) \right]$$

I para que M' sea mayor que M'' es necesario que

$$\Sigma P + P_m > \frac{l \pm k}{2l} \Sigma P \quad (7)$$

En consecuencia, el momento máximo maximorum para un sistema dado de fuerzas se obtiene a plomo de aquella o de una de aquellas fuerzas que colocada en la posición que define la relación (5), satisface simultáneamente las condiciones (6) i (7).

Observaciones. — I. Como se ha dicho ántes, las consideraciones espuestas son aplicables a un sistema determinado de fuerzas. Cuando, como es el caso en los puentes ferroviarios, el sistema es ilimitado i las fuerzas tienen valores i distribuciones variadas, el momento máximo maximorum de que es capaz un sistema compuesto de un cierto número de fuerzas, puede muy bien ser inferior al que se obtendría cuando se modificara el sistema haciendo entrar nuevas fuerzas por la derecha o salir otras por la izquierda, o ámbas cosas a la vez.

II.—Puede suceder que un sistema dado no pueda colocarse sobre la viga en la posición que indica la relación (5) con respecto al eje que satisface las condiciones (6) i (7); sea: *a*) porque al darle esta posición entren fuerzas por la derecha o salgan otras por la izquierda; sea: *b*) porque salgan fuerzas por la derecha o entren por la izquierda. En tal caso el sistema en referencia no desarrolla sobre la viga el momento máximo de que es capaz; pero podría suceder que a plomo de otra de sus fuerzas desarrollara un momento superior al que proporcionan los demás sistemas posibles sobre la viga. Deberá entónces considerarse dicho sistema en la posición que define la relación (5) con respecto a la fuerza que precede a la que satisface las condiciones (6) i (7), en el caso *a*), o con respecto a la que le sigue, en el caso *b*).

Es claro que si para esta segunda posición el sistema no se conserva sobre la viga, es porque está mal elegido: no es un sistema posible.

Se deduce de lo que hemos espuesto que cada sistema posible dentro de la viga desarrolla a plomo de una de sus fuerzas un momento de flexión máximo; i el mayor de todos estos será el máximo maximorum que se busca.

Para fijar los sistemas posibles sobre la viga podríamos utilizar el cuadro *C*; pero simplificamos muchísimo la investigación si nos auxiliamos de un cuadro esquemático como el que se ve en la lámina I, fácil de comprender a la simple inspección.

Para fijar bien las ideas, esplicaremos la manera de usarlo, con un ejemplo numérico.

Tomemos una viga de 25 m. de luz.

Sobre una regla de longitud mínima de 25 m a la escala del esquema, marcamos los puntos extremos i el punto central, e iremos colocándola para cada uno de los sistemas

que pueden estar sobre la viga en la posicion que resulta de la relacion (5) con respecto a aquellas fuerzas para las cuales sea posible sin que el sistema sobre la viga cambie.

Con los datos así obtenidos llenamos la columna (1) del cuadro D que completamos con los datos correspondientes, proporcionados por el cuadro C Calculando la columna (5) encontraremos cuales son los sistemas i los ejes que pueden dar el momento máximo maximorum. I no resta mas que calcular la columna 9, construyendo la fórmula (3) para dichos diversos sistemas, sin olvidar las consideraciones espuestas al tratar del momento máximo en una seccion cualquiera.

Encontramos en el ejemplo propuesto, que el momento máximo maximórum lo desarrolla el eje número 11 estando el sistema 6 a 16 sobre la viga.

CUADRO D

	$P_n - P_m - P_n$	ΣP	$\Sigma P'$	$\frac{l \pm k}{2l} \Sigma P$	$\Sigma P' + P_m$	x	α	M_x
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
I	1— 6—12	146320	60610	70830,6	73490	12,102	1,372	458279,63
II	2— 7—13	153410	67040	74689,2	79920	12,172	2,062	454681,88
III	2— 8—13	153410	79920	79965,8	92800	13,032	1,202	450252,30
IV	3— 9—14	152750	79260	82283,4	85710	13,467	0,027	432475,92
V	6—10—16	137890	45090	64645,6	58630	11,726	2,866	488489,27
VI	6—11—16	137890	58630	68719,6	72170	12,456	2,126	488489,27

Procediendo de esta misma manera se ha calculado el valor del momento máximo maximorum que desarrolla el tren efectivo a que nos hemos venido refiriendo en vigas de luces variables de 5 en 5 metros hasta 40 m., i de 10 en 10 m. hasta 100 m.

Los resultados obtenidos de este estudio forman parte de los antecedentes que servirán de base al nuevo cuaderno de cláusulas i condiciones jenerales para el cálculo i la construccion de los puentes de ferrocarril, antecedentes que se darán a la publicidad en época oportuna.

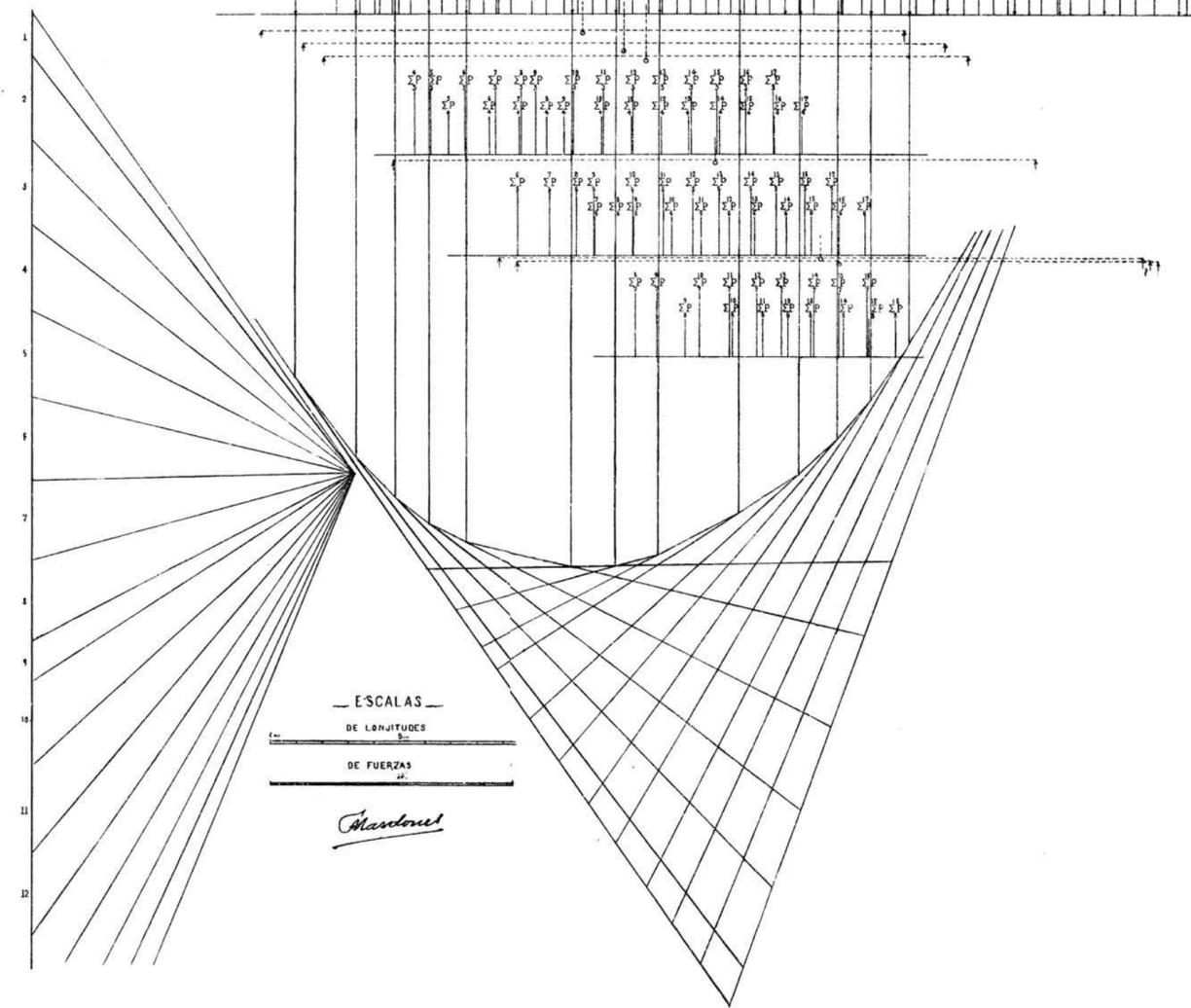
FRANCISCO MARDONES

(Continuará)



LÁMINA I

CUADRO ESQUEMÁTICO



Cuadro A

	1ª Locomotora					Tender			2ª Locomotora				Tender		1ª Carr		2ª Carr		3ª Carr		4ª Carr		5ª Carr		6ª Carr		7ª Carr			
	6.4.50	13.54.0	13.54.0	13.54.0	13.54.0	12.98.0	12.98.0	12.98.0	6.4.50	13.54.0	13.54.0	13.54.0	13.54.0	12.98.0	12.98.0	12.98.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	11.40.0	
1		15898	33530	47070	60610	73498	85370	98250	105700	119760	132700	145620	158600	172760	185820	198880	15300	25510	242700	254100	265500	276900	288300	299700	311100	322500	333900	345300	356700	368100
2	0.50		27050	40200	53000	67000	79200	92000	95500	112700	126300	139800	153400	167000	180600	194200	14700	24400	270500	283600	296700	309800	322900	336000	349100	362200	375300	388400	401500	414600
3	1.50	13540		27080	40220	53020	67020	79220	82700	99900	113500	127000	140500	154000	167500	181000	13200	23900	265500	278600	291700	304800	317900	331000	344100	357200	370300	383400	396500	409600
4	3.50	27080	13540		27100	53040	67040	79240	82720	99920	113520	127020	140520	154020	167520	181020	12700	23400	262000	275100	288200	301300	314400	327500	340600	353700	366800	379900	393000	406100
5	4.070	40120	27080	13540		25480	39300	52100	64900	77700	90500	103300	116100	128900	141700	154500	11400	21100	240000	253100	266200	279300	292400	305500	318600	331700	344800	357900	371000	384100
6	6.010	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	90700	103500	116300	129100	141900	10200	19900	228000	241100	254200	267300	280400	293500	306600	319700	332800	345900	359000	372100
7	7.549	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	90700	103500	116300	129100	8800	18700	216000	229100	242200	255300	268400	281500	294600	307700	320800	333900	347000	360100
8	9.520	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	90700	103500	116300	7200	17400	203000	216100	229200	242300	255400	268500	281600	294700	307800	320900	334000	347100
9	10.700	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	90700	103500	5600	16100	190000	203100	216200	229300	242400	255500	268600	281700	294800	307900	321000	334100
10	11.920	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	90700	4000	14800	177000	190100	203200	216300	229400	242500	255600	268700	281800	294900	308000	321100
11	13.270	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	77900	2400	13500	166000	179100	192200	205300	218400	231500	244600	257700	270800	283900	297000	310100
12	14.620	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	65100	800	12200	155000	168100	181200	194300	207400	220500	233600	246700	259800	272900	286000	299100
13	15.980	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	52300	1400	10900	144000	157100	170200	183300	196400	209500	222600	235700	248800	261900	275000	288100
14	17.240	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	39500	2800	9600	133000	146100	159200	172300	185400	198500	211600	224700	237800	250900	264000	277100
15	18.500	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		25700	4200	8300	122000	135100	148200	161300	174400	187500	200600	213700	226800	239900	253000	266100
16	19.760	184560	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540		5600	7000	111000	124100	137200	150300	163400	176500	189600	202700	215800	228900	242000	255100
17	21.020	197600	184560	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	13540	4000	5700	100000	113100	126200	139300	152400	165500	178600	191700	204800	217900	231000	244100
18	22.280	210640	197600	184560	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	27080	2400	4400	89000	102100	115200	128300	141400	154500	167600	180700	193800	206900	220000	233100
19	23.540	223680	210640	197600	184560	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	40120	800	3100	78000	91100	104200	117300	130400	143500	156600	169700	182800	195900	209000	222100
20	24.800	236720	223680	210640	197600	184560	171520	158480	145440	132400	119360	106320	93280	80240	67200	54160	1400	1800	67000	80100	93200	106300	119400	132500	145600	158700	171800	184900	198000	211100