

# DOCUMENTOS

---

## **NORMAS ADMINISTRATIVAS PARA LA EJECUCION DE CONSTRUCCIONES DE CONCRETO ARMADO**

DIRECCION JENERAL  
DE OBRAS PÚBLICAS

---

Santiago, 10 de Febrero de 1912.

Señor Ministro: El desarrollo creciente que está tomando en la ejecucion de las obras públicas i privadas del pais la aplicacion del concreto armado, ha inducido a esta oficina a proponer al Supremo Gobierno, de acuerdo con las ideas sustentadas en el Consejo de Obras Públicas, la adopción de una norma segun la cual deban llevarse a cabo los trabajos con este sistema de construccion, a fin de evitar en lo posible los accidentes que pueden producirse por el desconocimiento de las reglas en conformidad a las cuales debe procederse al cálculo de cada una de las partes constitutivas de una construccion.

Estas reglas han sido deducidas de los resultados de numerosos esperimentos practicados tanto en Francia como en Alemania, Italia, Estados Unidos, etc.

Reconociendo a Francia como cuna del nuevo sistema de construccion, puede estimarse que su mayor desarrollo lo ha experimentado en Alemania, Austria e Italia.

Especialmente en el primero de los paises nombrados, se ha hecho la aplicacion de principios científicos a los cálculos de resistencia que deben efectuarse para determinar las dimensiones de los muros, vigas, pisos, etc.

En el año 1904 se dictó por el Ministerio de Obras Públicas de Prusia el decreto que adoptaba las primeras normas que debian aplicarse a la construccion de obras de concreto armado.

Las experiencias adquiridas con posterioridad obligaron a modificar en parte aquellas normas en el año de 1907, i nuevos ensayos i esperimentos han obligado a completarlas.

Como últimamente la mayoría de los paises europeos han adoptado estas nor-

mas con sólo ligeras modificaciones, cree el infrascrito que el Ministerio de US. podría dictar un decreto adoptando como normas oficiales para Chile las que en traducción acompaño a US., mientras que esperiencias practicadas en el pais aconsejen introducir en ellas algunas modificaciones.

En caso de que ese Ministerio accediera a la proposicion de esta oficina, ruego a US. se sirva autorizarla al mismo tiempo para proceder a la impresion de estas normas, con el objeto de darlas a conocer al personal de esta Direccion.

Dios guarde a US.—*Enrique Döll R.*

---

MINISTERIO DE INDUSTRIA  
I OBRAS PÚBLICAS

Valparaiso, 4 de Marzo de 1912.

Secc. 2.<sup>a</sup> N.º 307.—Vistos estos antecedentes,

DECRETO: Adóptanse a propuesta del Director de Obras Públicas como normas oficiales para la ejecucion de construcciones de concreto armado las normas administrativas que rijen al efecto en Prusia.

Se autoriza al espresado funcionario para que ordene la impresion de dichas normas.

Tómese razon, comuníquese i publíquese.—*BARROS LUCCO.—Abraham Ovalle.*

## NORMAS ADMINISTRATIVAS PARA LA EJECUCION DE CONSTRUCCIONES DE CONCRETO ARMADO

(Estipulaciones Prusianas.—Circular del Ministerio de Obras Públicas del 24—5—1907)

### I.—Prescripciones generales

#### A.—EXÁMEN

##### § 1

1. La ejecucion de una obra parcial o total de concreto armado, deberá ser precedida del exámen de la Inspeccion Fiscal o Municipal de Construcciones. Para este fin, al presentarse una solicitud de permiso para construir una obra, toda o en parte, de concreto armado, se exigirá la presentacion de los planos, cálculos estáticos i descripciones, que permitan deducir la disposicion del conjunto, i los detalles mas importantes.

En caso de que el propietario o el empresario de una obra en construccion se decidan a emplear concreto armado despues de iniciados los trabajos, la Inspeccion de Construcciones Locales insistirá en que se cumplan las disposiciones anteriores en lo que respecta al exámen de las partes de construccion por ejecutar en concreto armado, con la debida anticipacion i ántes de proceder a la construccion misma.

En ningun caso se permitirá construir una obra sin ántes haber obtenido el permiso correspondiente.

2. En la descripcion de la obra deberá mencionarse la procedencia i constitucion del material que se va a emplear en el concreto, la dósís de la mezcla, la proporcion de agua por agregar, i la resistencia a la compresion que deberán tener los cubos de 30 c/m de arista de la mezcla anterior, tomada al pié de la obra del material por emplear, despues de 28 dias de fragua. La resistencia a la compresion deberá ser comprobada a pedido de la Inspeccion de Construcciones ántes de la iniciacion de las obras.

3. La mezcla del concreto deberá hacerse por unidades de peso, para lo cual se considerará que el saco de concreto pesa 57 kilogramos i la barrica 170 kilogramos netos.

Cuando se empleen barricas o sacos completos, las medidas en volúmen del concreto deberán tambien corresponder en peso a la dósís prevista del concreto.

4. Las solicitudes i planos deberán presentarse firmados por el propietario, por el empresario que ha confeccionado los planos, i por la persona que ejecutará lo construccion. Un cambio en la persona constructora, deberá ser comunicado inmediatamente a la Inspeccion de Construcciones.

## § 2

1. Las cualidades del material por emplear en el concreto, siempre que lo exija la Inspeccion de Construcciones, deberán ser comprobadas por certificados del Laboratorio de ensayos oficial.

Estos certificados, por regla jeneral, no deberán datar de mas de un año.

2. Sólo se permitirá el empleo de cemento portland que reúna las condiciones de las normas prusianas.

Los certificados sobre la composicion llevarán indicaciones sobre su consistencia, tiempo de fragua, fineza de molienda, asi como sobre su resistencia a la traccion i a la compresion. El constructor debe imponerse personalmente de su consistencia i tiempo de fragua.

3. La arena, ripio i demas agregados deberán ser apropiados para la confeccion del concreto, segun la obra a que éste se destine. Los granos de estos agregados deberán ser de dimensiones tales que la colocacion del concreto i el apisonamiento entre las armaduras de fierro i moldes, pueda llevarse a cabo con toda seguridad i sin desviar las armaduras de fierro.

## § 3.

1. Los procedimientos de cálculo empleados deberán por lo ménos presentar la misma seguridad que los cálculos efectuados segun las indicaciones del Capítulo II i segun los procedimientos indicados con ejemplos en el Capítulo III de estas normas. Segun pedido, el empresario deberá poder constatar lo anterior.

2. En sistemas nuevos de construccion aun no puestos en práctica, puede la Inspeccion de Construcciones hacer depender el permiso del resultado de pruebas previas, con variaciones de cargas, las que se seguirán hasta la ruptura.

## B.—EJECUCION

## § 4

1. La Inspeccion de Construcciones podrá hacer comprobar las cualidades del material empleado en una obra en ejecucion, por medio de un laboratorio oficial o de cualquiera otra institucion que le merezca confianza, i tambien podrá someter a ensayo el concreto elaborado con estos materiales.

La prueba de resistencia puede tambien efectuarse en el sitio de la obra, con una prensa para ensayar concreto, cuya exactitud esté comprobada oficialmente.

2. Los bloques de concreto destinados a ensayos deberán tener la forma de cubos, de 30 c/m arista. Cada bloque de ensaye llevará la fecha del dia en que fué confeccionado, ademas de un sello para su reconocimiento, i será guardado hasta su endurecimiento segun indicacion de la Inspeccion de Construcciones.

3. El cemento será entregado con su envoltura orijinal, en el lugar de la construccion.

4. La mezcla del concreto deberá hacerse de tal modo que la cantidad de cada uno de los componentes corresponda exactamente a la proporcion de mezcla prefijada, lo cual en todo tiempo debe ser susceptible de fácil comprobacion. En el empleo de vasijas como medida, éstas se llenarán siempre uniformemente, para conseguir siempre una composicion homojénea del material.

## § 5

1. La colocacion en obra del concreto deberá efectuarse inmediatamente despues de su confeccion, o ántes de principiar la fragua.

2. El concreto preparado podrá permanecer, en tiempo de calor i seco a lo mas una hora, en tiempo frío i húmedo a lo mas dos horas, sin ser empleado. Las cantidades de concreto no usadas inmediatamente deberán preservarse de las influencias del tiempo, del sol, del viento, de la lluvia fuerte, i ántes de su empleo serán batidas de nuevo.

3. El trabajo de colocacion en obra del concreto deberá hacerse de una manera continúa hasta terminar el pisoneado.

4. La mezcla de concreto será agregada sucesivamente en capas a lo sumo de 15 c/m de espesor, i con una proporcion de agua tal que se pueda conseguir por el pisoneado la consistencia deseada. Para el pisoneado se usarán pisones de forma i peso apropiados.

## § 6

1. Las armaduras de fierro serán cuidadosamente limpiadas ántes de su empleo, quitándoles la grasa, el barro i el moho suelto. Con especial atencion se cuidará que las armaduras de fierro tengan en la construccion su verdadera colocacion i su debida separacion i forma. Con este objeto serán mantenidas en su posicion por disposiciones especiales, i serán envueltas por una masa de concreto compacto de material mas fino.

Si en una viga los fierros se sobreponen en varias capas, se envolverá cada capa, separadamente.

El espesor mínimo de concreto debajo de las armaduras será por lo ménos de 2 cm en las vigas i de 1 cm en las losas.

2. Los moldes i apoyos de pisos i de vigas, deberán presentar una resistencia suficiente a la flexion i una rijidez tal que resistan la influencia del pisoneado.

Los moldes deberán disponerse de tal manera que si se permite retirar sus apoyos ántes del completo endurecimiento del concreto, esta operacion pueda efectuarse sin peligro.

Para los apoyos deberán usarse en lo posible maderas de una sola pieza. Si las juntas son inevitables, deberán ellas estar firmemente aseguradas.

3. En las columnas, a fin de ir observando la posición exacta de las armaduras, los moldes deberán dejarse con uno de sus costados abierto, por el cual se introducirá el concreto; i a medida que avance el trabajo esta abertura se irá cerrando.

4. Se dará aviso, por lo ménos con 3 días de anticipación, a la Inspección de Construcciones de la terminación i armadura de moldes en cualquier piso de la construcción, i del día en que se proyecte la colocación del concreto.

### § 7

1. Las diversas capas de concreto deberán colocarse en lo posible sobre material fresco (sin fraguar), i en todo caso deberá limpiarse la superficie de las capas antiguas.

2. Al proseguirse la construcción sobre concreto endurecido, deberá raspase la superficie antigua i barrerse cuidadosamente, humedeciéndola en seguida; e inmediatamente después se aplicará una capa de mortero de cemento semi-líquido.

Hecho esto, se seguirá la colocación del concreto.

### § 8

1. En la construcción de paredes i pilares, en edificios de uno o más pisos, podrán iniciarse los trabajos en los pisos superiores, solamente después del suficiente endurecimiento de los postes correspondientes del piso inferior. Por lo ménos 3 días antes de la continuación de los trabajos en los pisos superiores, deberá darse aviso a la Inspección de Construcciones.

### § 9

1. En tiempo de heladas sólo se permitirá trabajar cuando se hayan tomado precauciones especiales que prevengan los efectos perniciosos de este agente atmosférico. Los materiales que han sufrido los efectos de las heladas no podrán emplearse.

2. Cuando se hayan paralizado las obras a causa de heladas prolongadas, (§ 11), i el tiempo mejore, sólo podrá continuarse el trabajo con la autorización de la Inspección de Construcciones.

### § 10

1. Habrá que precaver al concreto, hasta su suficiente endurecimiento, de la influencia de heladas, de su desecación prematura por el calor i de las trepidaciones i cargas.

2. Los plazos que deben mediar entre la conclusión del pisoneado i el retiro de los moldes i apoyos, dependerán del estado del tiempo, de la separación entre apoyos i del peso propio de las secciones de la obra. Los moldes laterales de las vigas, los moldes de los pilares i de los pisos, no deberán ser retirados sino después de 8 días; los apoyos de las vigas solo después de 3 semanas.

En caso de que las distancias entre los apoyos sean grandes, el plazo podrá ser prolongado, según casos mas o ménos favorables, hasta seis semanas.

3. En edificios de varios pisos, el retiro de los apoyos del piso inferior sólo podrá efectuarse despues que el endurecimiento del superior haya avanzado tanto que él pueda sostenerse por sí mismo.

4. Si el pisoneado se ha terminado poco tiempo ántes del comienzo de las heladas, deberán tomarse precauciones especiales para efectuar el retiro de los moldes i apoyos.

5. Si durante el tiempo de fragua sobrevienen heladas, por motivo de éstas podrá aumentarse el plazo que se indica en el inciso 2.

6. Para el retiro de los moldes i apoyos deberán tomarse precauciones especiales, para evitar trepidaciones provenientes de las cuñas o aparatos de decimbramiento, etc.

7. Si se desea retirar los moldes i apoyos, debe avisarse a la Inspeccion de Construcciones por lo ménos 3 días ántes.

## § 11

1. Se llevará en la obra un libro diario sobre la marcha de los trabajos, que constantemente estará listo para su exámen. En los días de heladas, por ejemplo, deberá anotarse los grados de temperatura i la hora de su medicion, etc.

## C.—RECEPCION

## § 12

1. Para la recepcion de una obra i con el objeto de facilitar el reconocimiento del procedimiento de construccion seguido, sus diversas secciones tendrán partes libres sin estuco, cuya situacion será indicada por el empleado que va a recibir la obra. Éste tambien se reserva el derecho de constatar la perfecta ejecucion de la obra, la dureza adquirida, i su resistencia, por medio de ensayos especiales.

2. Si existen dudas fundadas sobre la proporcion de mezcla empleada i su grado de dureza, podran extraerse muestras de ensaye de la construccion misma, una vez terminada.

3. Si se considera necesario llevar a cabo pruebas con cargas, éstas se harán según las indicaciones del empleado receptor, a cuyo efecto se notificará oportunamente al dueño de la obra i su contratista, por si desean asistir.

La carga de prueba se verificará solamente 45 días despues del endurecimiento del concreto, i ellas se reducirán al mínimo de espacio necesario según indicacion de la Inspeccion de Construcciones.

4. Para la prueba de carga de pisos i vigas, se procederá del modo siguiente: Cuando la prueba va a consistir en cargar completamente la superficie de un piso, la carga no deberá pasar del valor  $0.5 g + 1.5 p$ , siendo  $g$  el peso propio i  $p$  la sobrecarga uniformemente repartida.

Con sobrecargas superiores a 1 000 Kg por m<sup>2</sup> pueden introducirse reducciones hasta llegar a la simple sobrecarga.

Cuando la prueba va a consistir en cargar solo una parte de un piso, se repartirá uniformemente la carga en la parte media del piso, en una zona de un largo igual a la luz de la losa i de un ancho igual a  $\frac{1}{3}$  de ésta, no bajando este ancho de un mínimo de un metro. La carga aplicada en estos casos no debe sobrepasar el valor:  $g + 2 p$ .

Como peso propio se considerará la totalidad del material que ha entrado en la composición de los cielos i pisos. Como sobrecargas las indicadas en el § 16 inciso 3.

5. En las cargas de prueba para pilares, éstos se cargarán céntricamente. Por otra parte se evitará una sobrecarga que produzca en las fundaciones tasas mayores que las fijadas.

## II.—Normas para el cálculo estático

### A.—PESO PROPIO

#### § 13

1. El peso propio del concreto, incluido el peso de la armadura de fierro, será de 2 400 Kg por m<sup>3</sup> siempre que no se compruebe otro peso.

2. En pisos, además del peso propio, deberá considerarse también el peso del pavimento, determinado por unidades de los materiales de que se componga.

### B.—DETERMINACION DE LAS FUERZAS ESTERIORES

(Ver normas oficiales del Decreto de 11 Abr. 1907).

#### § 14

1. En las partes de obras solicitadas a la flexión deberán calcularse los momentos i reacciones de apoyos tomando en cuenta la distribución de la carga i la forma de dichos apoyos, según se trate de vigas libremente apoyadas o continuas.

2. En las losas libremente apoyadas, se considerará como luz su largo libre más el espesor de la losa medido en su sección media. En losas continuas, la luz considerada en los cálculos será la distancia entre los ejes de los apoyos.

En vigas sobre dos apoyos, se considerará como luz la distancia entre apoyos más la dimensión de la parte apoyada.

3. En losas i vigas continuas, se podrá tomar como momento de flexión en el centro del paño los  $\frac{4}{5}$  del momento que se produciría en una viga sobre dos apoyos siempre que no se puedan determinar los momentos i las reacciones de apoyo efectivos por la teoría de la viga continua, bajo la condición de libre apoyo en el medio i en los extremos, o por tanteos. El momento negativo en los apoyos será igual al momento central de una viga libre sobre dos apoyos. Solo podrán ser calculadas como

continuas las losas o vigas cuando se hallen sobre apoyos ríjidos situados en un mismo plano, o se apoyen sobre vigas de concreto armado.

En la disposicion de la armadura de fierro deberá tenerse presente en toda circunstancia la posibilidad de jenerarse momentos negativos.

4. En cálculos de vigas se puede tomar en cuenta momentos de encastramiento en los extremos sólo cuando disposiciones de construccion especiales permitan constatar la seguridad de estos encastramientos.

5. En una viga continua se considerará para el cálculo a lo mas tres paños. Para sobrecargas de mas de 1 000 Kg por m<sup>2</sup>, se exigirá el cálculo con la posicion i distribucion mas desfavorable de la carga.

6. En las losas con nervio se admitirá para el cálculo una faja que tenga un ancho igual a lo mas a  $\frac{1}{6}$  de la luz del nervio. Esta distancia se medirá a cada lado del eje del nervio.

7. Losas con armaduras cruzadas de fierro, apoyadas en todo su perímetro i que esten uniformemente cargadas, podrán calcularse, cuando su largo  $a$  es menor que  $1\frac{1}{2}$  su ancho  $b$ , por la fórmula:

$$M = \frac{p b^2}{12}$$

Para precaverse de los momentos negativos en los apoyos, se adoptarán disposiciones especiales de forma i situacion de las armaduras de fierro.

8. El espesor mínimo de las losas, ya esten solas o con nervios, será de 8 centímetros.

9. En los cálculos de pilares debe preverse que la carga pueda llegar a ser unilateral.

#### C.—DETERMINACION DE LAS FUERZAS INTERIORES

### § 15

1. El coeficiente de elasticidad del fierro será 15 veces mayor que el del concreto, siempre que no se compruebe otro valor.

2. Las tensiones que se producen en la seccion de un cuerpo sometido a la flexion, deberán calcularse admitiendo que los esfuerzos son proporcionales a sus distancias al eje neutro, i que las armaduras de fierro resisten por sí solas todos los esfuerzos de traccion.

3. En construcciones o partes de construccion que están espuestas a la intemperie, humedad, gasés de humo i otras influencias perniciosas semejantes, deberá comprobarse que las rasgaduras producidas no se deben a esfuerzos de traccion del concreto.

4. Deberán determinarse las tensiones por cisalle en el concreto cuando la forma i disposiciones adoptadas no escluyan por sí mismas la posibilidad de ruptura

por esta causa. Cuando estas tensiones no sean resistidas por los dispositivos adoptados, deberan colocarse armaduras de fierro especiales.

5. A las armaduras deberá dárseles una disposicion tal que al ser introducido el concreto en los moldes ellas no sufran desviacion. La adherencia en todo caso deberá ser determinada por el cálculo.

6. El cálculo de los pilares se hará como para piezas cargadas por punta cuando la razon entre la altura i el lado menor de su seccion sea mayor que 18.

Por medio de amarras trasversales deberá conseguirse que las barras de fierro introducidas en los moldes no cambien de situacion.

La distancia entre estas amarras trasversales deberá corresponder mas o ménos a la menor dimension trasversal del pilar; pero en ningun caso sobrepasará 30 veces el diámetro de las barras longitudinales.

7. Para el cálculo de pilares cargados por punta se hará uso de la fórmula de Euler. (Véase decreto de 18 de Setiembre de 1909).

#### D.—TENSIONES ADMISIBLES

### § 16

1. En piezas sometidas a flexion el concreto no deberá trabajar a la compresion a una tasa mayor de  $\frac{1}{6}$  de su resistencia de ruptura; las tasas de compresion i traccion del fierro no deberán sobrepasar 1 000 kg por  $\text{cm}^2$ .

2. Si se toma en cuenta la traccion del concreto, en los casos contemplados en el § 15 inciso 3, se considerará como tension admisible los  $\frac{2}{3}$  de la resistencia a la traccion determinada por ensayes. Si falta el certificado de ensaye a la traccion del concreto, se admitirá solamente una tasa igual a  $\frac{1}{10}$  de su tasa a la compresion.

3. Se aceptarán los siguientes valores de la carga:

a) El verdadero peso propio i sobrecarga existentes, en construcciones sometidas a trepidaciones moderadas; p. ej. en pisos de habitaciones, de casas de comercio, de almacenes.

b) El peso propio efectivo i una sobrecarga aumentada hasta en un 50%, en construcciones que reciben trepidaciones fuertes, o sometidas a cargas mui variables, como por ejemplo, en pisos de salas de reuniones, salas de baile, fábricas, bodegas.

c) El peso propio efectivo i una sobrecarga aumentada hasta en un 100%, en construcciones sometidas a fuertes remezones o golpes, como por ejemplo en cubiertas de subterráneos bajo calles o patios.

4. En pilares no deberá adoptarse como tasa de trabajo mas de  $\frac{1}{10}$  de la resistencia a la compresion del concreto por emplear. En el cálculo de la armadura deberá adoptarse un coeficiente de seguridad igual a 5.

5. La tasa de cizalle del concreto no deberá pasar de 4,5 kg por  $\text{cm}^2$ . Si se

comprueba en el concreto una mayor resistencia al cizalle, la tasa admisible no deberá sobrepasar  $\frac{1}{5}$  de esta resistencia.

6. La tasa de adherencia no sobrepasará a la tasa de cizalle.

### III. Procedimientos de cálculo, con ejemplos

#### A. FLEXION SIMPLE

a) Sin considerar el trabajo a la traccion del concreto.

Tratándose de vigas o losas con armaduras sencillas de hierro se tiene, si  $b =$  ancho de la losa,  $f_c =$  seccion total del hierro i  $n =$  razon entre los coeficientes de elasticidad del hierro i del concreto: (Fig. 1).

$$1. \quad \frac{bx^2}{2} = n f_c \left( h - \alpha - x \right)$$

$$2. \quad x = \frac{n f_c}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{2b(h-\alpha)}{n f_c}} - 1 \right)$$

De la igualdad de los momentos de las fuerzas exteriores e interiores resulta:

$$3. \quad M = \sigma_b \frac{x}{2} b \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) = \sigma_e f_c \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right)$$

en que  $\sigma_b$  es la compresion máxima del concreto i  $\sigma_e$  es la traccion media de la armadura de hierro.

De donde resulta:

$$4. \quad \sigma_b = \frac{2 M}{b x \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right)}$$

$$5. \quad \sigma_e = \frac{M}{f_c \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right)}$$

$$6. \quad x = \frac{n (h - \alpha) \sigma_b}{\sigma_e - n \sigma_b}$$

$$7. \quad \frac{b x}{2} \cdot \sigma_b = \sigma_e f_c$$

En vigas T (losas con nervio) el cálculo es igual al anterior si la línea neutra cae dentro de la losa o en su canto inferior.

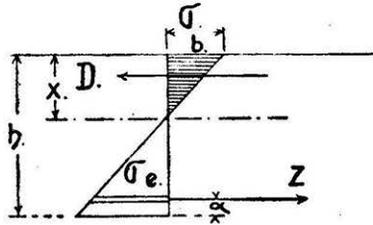


Fig. 1.

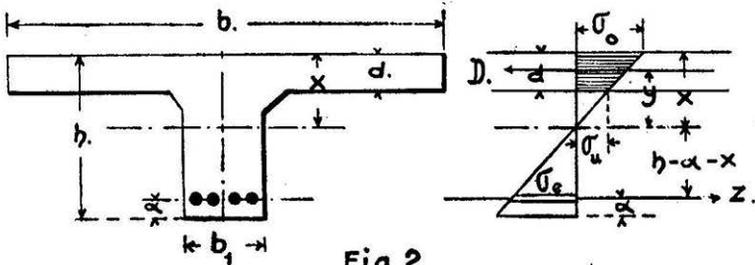


Fig 2.

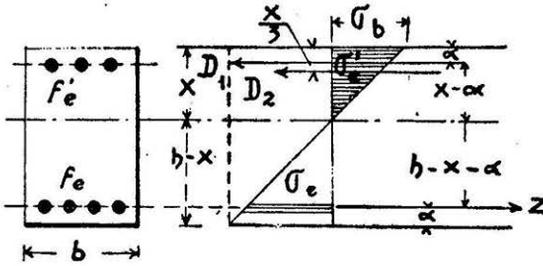


Fig.3.

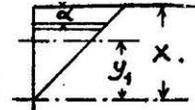


Fig. 4.

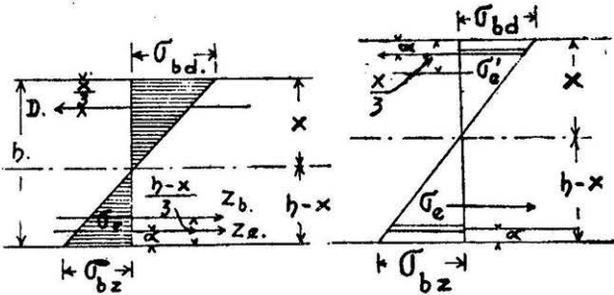


Fig. 5.

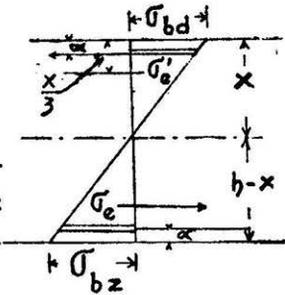


Fig. 6.

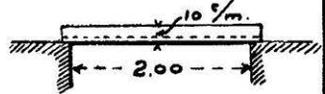


Fig.7.

Si el eje neutro pasa por el nervio, podrán despreciarse las pequeñas compresiones que se producen en este nervio.

Entonces, según fig. 2, se tiene:

$$8. \quad \sigma_u = \frac{x-d}{x} \sigma_o$$

$$9. \quad \sigma_e = n \frac{h-\alpha-x}{x} \sigma_o$$

$$10. \quad \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} b d = \sigma_e f_e$$

Después de introducidos los valores de las ecuaciones 8) i 9) en la ecuación 10), resulta

$$11. \quad x = \frac{\frac{b d^2}{2} + n f_e (h-\alpha)}{b d + n f_e}$$

Como la distancia del centro de gravedad del trapecio de los esfuerzos de compresión al borde superior es:

$$12. \quad x - y = \frac{d}{3} \frac{\sigma_o + 2 \sigma_u}{\sigma_o + \sigma_u}$$

resulta, al introducir el valor de  $\sigma_u$  de la ecuación 8):

$$13. \quad y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6(2x-d)} = \frac{2}{3} \left( x + \frac{(x-d)^2}{2x-d} \right)$$

$$14. \quad \sigma_e = \frac{M}{f_e (h-\alpha-x+y)}$$

$$15. \quad \sigma_o = \frac{x}{n(h-\alpha-x)} \cdot \sigma_e$$

Si las vigas i losas están armadas también en su parte superior (fig. 3), se usarán las siguientes ecuaciones:

Para determinar la posición del eje neutro:

$$16. \quad \frac{b x^2}{2} - f'_e (x-\alpha) + n f'_e (x-\alpha) = n f_e (h-\alpha-x)$$

de donde:

$$17. \quad x = - \frac{(n-1) f'_e + n f_e}{b} +$$

$$+ \sqrt{\left( \frac{(n-1) f'_e + n f_e}{b} \right)^2 + \frac{2}{b} [(n-1) f'_e \alpha + n f_e (h-\alpha)]}$$

El momento:

$$18. \quad M = \frac{b x}{2} \sigma_b \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) - f'_e \sigma'_b (h - 2\alpha) + f'_e \sigma'_e (h - 2\alpha)$$

en la que  $\sigma'_b$  representa la tasa de compresion del concreto en la parte media de la armadura superior, quedando determinada por:

$$\sigma'_b = \frac{x - \alpha}{x} \sigma_b$$

i como:

$$\sigma'_e = \frac{n(x - \alpha)}{x} \sigma_b$$

resulta:

$$19. \quad M = \left[ \frac{b x}{2} \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) + (n - 1) f'_e \frac{x - \alpha}{x} (h - 2\alpha) \right] \sigma_b$$

Si se desprecia la pequeña disminucion de la superficie de compresion del concreto debida a de la armadura superior, la ecuacion 17) se transforma en:

$$20. \quad x = -\frac{n(f_e + f'_e)}{b} + \sqrt{\left( \frac{n(f_e + f'_e)}{b} \right)^2 + \frac{2n}{b} [f'_e \alpha + f_e (h - \alpha)]}$$

i la 19) en:

$$21. \quad M = \left[ \frac{b x}{2} \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) + n f'_e \frac{x - \alpha}{x} (h - 2\alpha) \right] \sigma_b$$

Si el valor de  $\sigma_b$  se calcula con la ecuacion 21) teniendo como dato el momento, las tasas  $\sigma_e$  i  $\sigma'_e$  se encuentran fácilmente aplicando la lei de que las tensiones son proporcionales a sus distancias al eje neutro. Si se ha determinado el valor del momento, dada una compresion  $\sigma_b$  del concreto, se obtienen las tasas  $\sigma_e$  i  $\sigma'_e$  de la ecuacion:

$$22. \quad M = f_e \sigma_e \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) \pm f'_e \sigma'_e \left( \frac{x}{3} - \alpha \right)$$

i como:

$$\sigma'_e = \frac{x - \alpha}{h - \alpha - x} \cdot \sigma_e$$

se tiene:

$$23. \quad M = \left[ f_e \left( h - \alpha - \frac{x}{3} \right) \pm f'_e \frac{x - \alpha}{h - \alpha - x} \left( \frac{x}{3} - \alpha \right) \right] \sigma_e$$

Se puede tambien determinar el centro de gravedad comun del concreto i de la armadura en la zona comprimida (fig. 4):

$$24. \quad y_1 = \frac{\frac{b x}{2} \times \frac{2}{3} x \sigma_b + \sigma'_e f'_e (x - \alpha)}{\frac{b x}{2} \sigma_b + \sigma'_e f'_e} = \frac{\frac{b x^2}{3} + n f'_e (x - \alpha)^2}{\frac{b x^2}{2} + n f'_e (x - \alpha)}$$

resulta:

$$25. \quad M = f_e \sigma_e (h - \alpha - x + y_1)$$

b). Tomando en cuenta la traccion del concreto.

Si existe una armadura sencilla, conforme a la ecuacion 1) se tiene, segun fig. 5:

$$26. \quad \frac{b x^2}{2} = \frac{b (h - x)^2}{2} + n f_e (h - \alpha - x)$$

$$27. \quad x = \frac{\frac{b h^2}{2} + n f_e (h - \alpha)}{b h + n f_e}$$

De la igualdad de los esfuerzos de compresion i traccion resulta:

$$28. \quad \frac{b x}{2} \sigma_{bd} = b \frac{h - x}{2} \sigma_{bz} + \sigma_e f_e$$

i de la proporcionalidad de las dilataciones i tensiones:

$$29. \quad \sigma_{bz} = \frac{h - x}{x} \sigma_{bd}$$

$$29a. \quad \sigma_e = n \frac{h - \alpha - x}{x} \sigma_{bd}$$

La ecuacion de momentos tomada con respecto al eje neutro es:

$$30. \quad M = \frac{b x}{2} \sigma_{bd} \times \frac{2}{3} x + b \frac{h - x}{2} \sigma_{bz} \times \frac{2}{3} (h - x) + \sigma_e f_e (h - \alpha - x)$$

Introduciendo los valores de 29) i 29a), resulta:

$$31. \quad M = \frac{\sigma_{bd}}{x} \left[ \frac{b x^3}{3} + \frac{b (h - x)^3}{3} + n f_e (h - \alpha - x)^2 \right]$$

Si M es conocido, se calcula primero por la ecuacion 31) el valor de  $\sigma_{bd}$  i despues por las ecuaciones 29) i 29a) los valores  $\sigma_{bz}$  i  $\sigma_e$ .

En losas con nervio se tiene, cuando el eje neutro pasa por el nervio:

$$32. \quad x = \frac{b_1 \frac{h^2}{2} + (b - b_1) \frac{d^2}{2} + n f_e (h - \alpha)}{b_1 h + (b - b_1) d + n f_e}$$

$$33. \left\{ M = b \cdot \frac{\sigma_0 + \sigma_u}{2} \cdot d \cdot y + b_1 \frac{\sigma_u}{2} \cdot \frac{2}{3} (x-d)^2 + b_1 \frac{h-x}{2} \cdot \sigma_{bz} \times \frac{2}{3} (h-x) + \right. \\ \left. + \sigma_e f_e (h-\alpha-x) \right.$$

$$33a. \quad M = \frac{\sigma_0}{x} \left[ \frac{b}{2} \cdot d(2x-d) \cdot y + \frac{b_1}{3} [(x-d)^3 + (h-x)^3] + n f_e (h-\alpha-x)^2 \right]$$

$$34. \quad \sigma_{bz} = \frac{h-x}{x} \cdot \sigma_0$$

$$34a. \quad \sigma_e = n \frac{h-\alpha-x}{x} \cdot \sigma_0$$

Estas fórmulas son incómodas para la determinación de las secciones, cuando se da el momento.

Si son conocidas las dimensiones  $b$ ,  $b_1$ ,  $h$ ,  $f_c$ ,  $i$  se pone por condición que el eje neutro coincida con la arista inferior de la losa, se tiene:

$$35. \quad \frac{b x^2}{2} = b_1 \frac{(h-x)^2}{2} + n f_c (h-\alpha-x)$$

$$36. \quad \frac{b-b_1}{2} \cdot x^2 + (b_1 h + n f_c) x = \frac{b_1 h^2}{2} + n f_e (h-\alpha)$$

de donde se deduce  $x$ , o sea el espesor de la losa.

Las tasas resultantes se determinarían entonces por:

$$37. \quad M = \frac{\sigma_0}{x} \left[ \frac{b x^3}{3} + b_1 \frac{(h-x)^3}{3} + n f_c (h-\alpha-x)^2 \right]$$

i las ecuaciones 34) i 34a).

Si se colocan también barras en la zona de compresión (fig. 6), se tiene:

$$38. \quad x = \frac{\frac{b h^2}{2} + (n-1) [f'_e \cdot \alpha + f_e (h-\alpha)]}{h b + (n-1) (f'_e + f_e)}$$

$$39. \quad M = \left[ \frac{b x^3}{3} + \frac{b (h-x)^3}{3} + (n-1) (f'_e (x-\alpha)^2 + f_e (h-\alpha-x)^2) \right] \frac{\sigma_{bd}}{x}$$

Si las barras superiores e inferiores son de igual sección, se tiene que:  $x = \frac{h}{2}$ , i:

$$40. \quad M = \left[ \frac{b h^2}{6} + \frac{4(n-1)f_e}{h} \left( \frac{h}{2} - \alpha \right)^2 \right] \sigma_{bd}$$

Se pueden obtener simplificaciones en las expresiones 2), 4) i 5) para el cálculo de las obras corrientes, como ser losas i vigas de seccion rectangular i con armadura de fierro solamente en la zona de traccion, de la manera siguiente.

Si los datos son el momento solicitante i las secciones del concreto i del fierro, i se quiere determinar las tasas de trabajo, se tendrá:  $f_e = \frac{b(h-\alpha)}{m}$ , de donde:

$$m = \frac{b(h-\alpha)}{f_e}$$

Para los distintos valores de  $m$  se puede establecer el siguiente cuadro:

**Cuadro N.º 1**

Valor de $f_e$	Valores correspondientes de $x$	Tasas de trabajo $\sigma_b$	Tasas de trabajo $\sigma_c$
$b(h-\alpha) : 100$	$0,418 (h-\alpha)$	$5,559 \frac{M}{b(h-\alpha)^2}$	$116 \frac{M}{b(h-\alpha)^2} = 20,867 \sigma_b$
» : 110	0,403 »	5,735 »	127 » = 22,145 »
» : 120	0,391 »	5,895 »	138 » = 23,409 »
» : 130	0,379 »	6,040 »	149 » = 24,668 »
» : 140	0,368 »	6,194 »	160 » = 25,831 »
» : 150	0,358 »	6,344 »	170 » = 26,797 »
» : 160	0,349 »	6,485 »	181 » = 27,911 »
» : 170	0,341 »	6,617 »	192 » = 29,016 »
» : 180	0,333 »	6,756 »	203 » = 30,049 »
» : 190	0,326 »	6,883 »	213 » = 30,946 »
» : 200	0,320 »	7,000 »	224 » = 32,000 »

Si los datos son el momento solicitante i las tasas de trabajo del concreto i fierro, se deducirá la seccion observando que la ecuacion 6) toma la forma:

$$x = s(h-\alpha) \quad \text{si:} \quad s = \frac{n \sigma_b}{\sigma_c + n \sigma_b}$$

Introduciendo este valor en la ecuacion 4), resulta:

$$41. \quad h - \alpha = \sqrt{\frac{2}{\left(1 - \frac{s}{3}\right) s \cdot \sigma_b}} \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

El valor de  $f_e$  se deduce de la ecuación 5):  $f_e = \frac{M}{\sigma_e (h - \alpha - \frac{s(h - \alpha)}{3})}$

si se introduce el valor:  $h - \alpha = r \sqrt{\frac{M}{b}}$  se tiene:

$$42. \quad f_e = \frac{1}{r \left(1 - \frac{s}{3}\right) \sigma_e} \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} = t \sqrt{\frac{M}{b}}$$

El cuadro siguiente contiene los valores de  $f_e$ ,  $x$ ,  $h - \alpha$ , para las tasas corrientes de  $\sigma_e$  i  $\sigma_b$ .

Cuadro N.º 2

Valores en Kg por cm <sup>2</sup>		Valores correspondientes de $x = s(h - \alpha)$	Valores correspondientes de $h - \alpha = r \sqrt{\frac{M}{b}}$	Valores correspondientes de $f_e = t \sqrt{\frac{M}{b}}$
$\sigma_e$	$\sigma_b$			
1 000	45	0,403 (h - $\alpha$ )	0,357 $\sqrt{\frac{M}{b}}$	0,00324 $\sqrt{\frac{M}{b}}$
»	44	0,398 »	0,363 »	0,00317 »
»	42	0,387 »	0,376 »	0,00306 »
»	40	0,375 »	0,390 »	0,00293 »
»	38	0,363 »	0,406 »	0,00280 »
»	36	0,351 »	0,423 »	0,00267 »
»	34	0,338 »	0,443 »	0,00254 »
»	32	0,325 »	0,464 »	0,00242 »
»	30	0,310 »	0,490 »	0,00228 »
»	28	0,296 »	0,518 »	0,00214 »
»	26	0,280 »	0,550 »	0,00200 »
»	24	0,265 »	0,588 »	0,00187 »
»	22	0,248 »	0,632 »	0,00173 »
»	20	0,230 »	0,686 »	0,00159 »
900	40	0,400 »	0,380 »	0,00337 »
»	35	0,368 »	0,420 »	0,00302 »
»	30	0,333 »	0,475 »	0,00263 »
»	25	0,294 »	0,549 »	0,00224 »
»	20	0,250 »	0,660 »	0,00184 »
800	40	0,429 »	0,367 »	0,00397 »
»	35	0,396 »	0,408 »	0,00353 »
»	30	0,360 »	0,459 »	0,00309 »
»	25	0,319 »	0,530 »	0,00264 »
»	20	0,273 »	0,635 »	0,00217 »

Estos cuadros tambien sirven para calcular losas con nervio, cuando el eje neutro coincide con la arista inferior de la losa o cuando se pone esto como condicion previa.

## B.—ESFUERZOS CENTRADOS DE COMPRESION

Si  $F$  es la seccion de concreto comprimido i  $f_e$  el total de fierro de su armadura, la carga admisible será:

$$43. \quad P = (F + n f_e) \cdot \sigma_b$$

$$44. \quad \sigma_b = \frac{P}{F + n f_e}$$

$$45. \quad \sigma_e = n \sigma_b = \frac{n P}{F + n f_e}$$

## C.—ESFUERZOS DE COMPRESION DESCENTRADOS

Para efectuar el cálculo se procede considerando el material como homogéneo, pero agregando a la seccion trasversal del concreto  $n$  veces la seccion trasversal de las armaduras de hierro, en las expresiones del área de la seccion trasversal i del momento de inercia. Los esfuerzos de traccion resultantes deberán ser resistidos por las barras de la armadura.

## D.—EJEMPLOS

1. (fig. 7).—En una losa de 2 m luz i 10 cm espesor, con una armadura de 5,02 cm<sup>2</sup> de seccion por cada metro de ancho (10 barras de 8 mm diámetro) i distantes 1½ cm de la arista inferior, contados desde el centro de las barras, se quiere calcular las tasas máximas de trabajo resultantes, tanto del concreto como del fierro.

El peso propio de la losa, por m cuadrado, es 0,10 × 2 400.....	240 Kg
Relleno con escorias comprimidas, de 0,10 cm espesor.....	60 »
Pavimento de 3,3 cm, de madera con su cama.....	20 »
Estuco de 1½ cm de espesor.....	20 »
Sobrecarga .....	250 »
Suma.....	590 Kg

$$\text{Se tiene: } M = \frac{590 \times 2,1^2 \times 100}{8} = 32\,500 \text{ Kg cm.}$$

$$x = \frac{15 \times 5,02}{100} \left[ \sqrt{1 + \frac{2 \times 100 \times 8,5}{15 \times 5,02}} - 1 \right] = 2,9 \text{ cm.}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \times 32500}{100 \times 2,9 (8,5 - 0,97)} = 29,8 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{32500}{5,02 (8,5 - 0,97)} = 860 \text{ Kg por cm}^2$$

La tasa de trabajo de compresion del concreto, de 29,8 Kg por  $\text{cm}^2$ , es solamente admisible cuando en el concreto por emplear se comprueba un resistencia a la ruptura por compresion de:  $6 \times 29,8 = 178,8$  Kg por  $\text{cm}^2$ .

Si se quiere hacer uso del cuadro N.º 1 se encuentra desde luego que para una seccion de fierro  $f_e = 5,02$  cm se tiene:

$$m = \frac{100 \times 8,5}{5,02} = \text{aproximadamente } 170.$$

$$\sigma_b = \frac{6\,617 \times 32500}{100 \times 8,5^2} = 29,8 \text{ Kg por } \text{cm}^2$$

$$\sigma_e = 29,016 \times 29,8 = 865 \text{ Kg por } \text{cm}^2$$

Para determinar los esfuerzos de cizalle longitudinal i la adherencia, deberá determinarse primero el esfuerzo de corte

$$V = \frac{590 \times 2,00}{2} = 590 \text{ Kg.}$$

El cizalle longitudinal será entónces:

$$\tau_o = \frac{V}{b \left[ h - \alpha - \frac{x}{3} \right]} = \frac{590}{100 \left[ 8,5 - \frac{2,9}{3} \right]} = 0,78 \text{ Kg por } \text{cm}^2$$

La adherencia resulta:  $\tau_1 = \frac{b \tau_o}{u}$

fórmula en que  $u$  representa el perímetro de las barras de la armadura.

$$\tau_1 = \frac{100 \times 0,78}{10 \times 0,8 \times 3,14} = 3,10 \text{ Kg por } \text{cm}^2$$

Los esfuerzos de cizalle, i de adherencia, no alcanzan a sus valores límites.

2. Se tiene una losa plana, libremente apoyada, con armadura sencilla, i de 2 m de luz. La sobrecarga es de 1 000 Kg por  $\text{m}^2$  i se refiere a ún edificio para fábrica.

Se quiere determinar el espesor necesario de la losa i de la armadura, suponiendo que el concreto por emplear tenga una resistencia a la compresion de 180 Kg por  $\text{cm}^2$ .

Para el cálculo del peso propio adoptaremos como espesor de la losa 18 cm, con lo que habria que adoptar en el cálculo una luz de 2,18 m.

El peso propio de 1 $\text{m}^2$ de losa es $0,18 \times 2400$ .....	432 Kg
Relleno con escoria comprimida, de 0,20 m alto.....	120 »
Estuco de concreto de $2\frac{1}{2}$ cm de espesor.....	48 »
	<hr/>
	600 Kg

Entonces:

$$M = \frac{600 + 1,5 \times 1000}{8} \times 2,18^2 \times 100 = 124\,700 \text{ Kg cm}$$

Ya que se admite para el concreto  $\sigma_b = \frac{180}{6} = 30$ , i para el fierro  $\sigma_e = 1\,000$  Kg por  $\text{cm}^2$ , se tiene segun la ecuacion 6):

$$x = \frac{15 \times 30}{1\,000 + 15 \times 30} (h - \alpha) = 0,31 (h - \alpha)$$

i segun la ecuacion 41):

$$h - \alpha = \sqrt{\frac{2}{\left(1 - \frac{0,31}{3}\right) 0,31 \times 30}} \times \sqrt{\frac{124\,700}{100}} = 17,3 \text{ cm}$$

la seccion de fierro  $f_e$  se determina de la ecuacion 1):

$$f_e = \frac{b x^2}{2 n (h - \alpha - x)} = \frac{100 \times 0,31^2 \times 17,3^2}{2 \times 15 (17,3 - 0,31 \times 17,3)} = 8 \text{ cm}^2$$

Se emplearán 9 barras de 11 mm de diámetro con una seccion total de  $8,55 \text{ cm}^2$ . El espesor total de la losa será de 19 cm, debido a la capa necesaria para cubrir las barras de la armadura.

Del cuadro II se habria obtenido, para  $\sigma_e = 1\,000$ , i  $\sigma_b = 30$ .

$$h - \alpha = 0,49 \sqrt{1247} = 17,3 \text{ cm}$$

$$f_e = 0,00228 \sqrt{12470000} = 8 \text{ cm}^2.$$

El esfuerzo de corte en el apoyo es:

$$V = 600 + 1,5 \times 1\,000 = 2\,100 \text{ Kg.}$$

El esfuerzo de cizalle:

$$\tau_o = \frac{2\,100}{100 \left(17,3 - \frac{0,31 \times 17,3}{3}\right)} = 1,36 \text{ Kg por cm}^2$$

la adherencia

$$\tau_1 = \frac{100 \times 1,36}{9 \times 1,1 \times 3,14} = 4,38 \text{ Kg por cm}^2.$$

3. Se desea calcular de nuevo la losa del N.º 2, admitiendo la condicion de que el concreto pueda trabajar a traccion.

De la ecuacion 27) se deduce:

$$x = \frac{\frac{100 \times 19^2}{2} + 15 \times 8,55 \times 17,3}{100 \times 19 + 15 \times 8,55} = 10,02 \text{ cm}$$

De la 31):

$$\sigma_{ba} = \frac{124700 \times 10,02}{\frac{100 \times 10,02^3}{3} + \frac{100 \times 8,98^3}{3} + 15 \times 8,55 \times 7,28^2} = 19,4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{bz} = \frac{19 - 10,02}{10,02} \times 19,4 = 17,4 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{15(17,3 - 10,02)}{10,02} \times 19,4 = 211,4 \text{ Kg por cm}^2$$

La traccion del concreto de 17,4 Kg es solamente permitida una vez comprobado por ensayes que el concreto tiene una resistencia a la traccion igual a los  $\frac{3}{2}$  de  $17,4 = 26,1 \text{ Kg por cm}^2$ .

Si el certificado correspondiente no se presenta, el concreto por emplear deberá tener una resistencia a la compresion de  $10 \times 17,4 = 174 \text{ kg por cm}^2$ . Por lo demas, admitida la tasa de 30 kg por  $\text{cm}^2$ , el concreto deberá tener una resistencia total a la compresion de 180 kg por  $\text{cm}^2$ .

Para calcular el cizalle a la altura del eje neutro, deberá calcularse la distancia  $z$ , separacion de los centros de las zonas comprimida i estendida.

De la condicion:  $M = D.z$ , en que

$$D = \frac{bx}{2} \cdot \sigma_b = \frac{100 \times 19,4 \times 10,02}{2} = 9720$$

se tiene

$$z = \frac{124700}{9720} = 12,83 \text{ cm}$$

entónces

$$\tau_o = \frac{2100}{100 \times 12,83} = 1,64 \text{ kg cm}^2$$

El cizalle a la altura de la armadura, donde obra conjuntamente con el concreto, es un poco menor. En jeneral se tiene:

$$\tau_o = \frac{V.S}{J.b}$$

en que:

$S$  = momento estático de la parte superior de la zona examinada,

$J$  = momento de inercia de toda la seccion.

Entónces, para la zona a la altura de la armadura, se tiene:

$$S = 100 \left( \frac{8,98^2}{2} - \frac{7,28^2}{2} \right) + 15 \times 8,55 \times 7,28 = 3698$$

$$J = \frac{M.x}{\sigma_b} = \frac{124700 \times 10,02}{19,4} = 64420$$

$$\tau'_0 = \frac{2100 \times 3698}{64420 \times 100} = 1,21 \text{ kg por cm}^2$$

La adherencia:

$$\tau'_1 = \frac{100 \times 1,21}{9 \times 1,1 \times 3,14} = 4 \text{ kg por cm}^2$$

4. Sea una viga de concreto armado de 4 m luz i de las dimensiones de la fig. 8. Admitiendo un momento solicitante  $M = 120000 \text{ kg cm}$ , se quiere determinar las tasas máximas del concreto i del fierro, despreciando los esfuerzos de traccion que resultan en el concreto.

Segun la ecuacion 17), se tiene:

$$x = \frac{14 \times 1,51 + 15 \times 4,52}{20} +$$

$$\sqrt{\left(\frac{14 \times 1,51 + 15 \times 4,52}{20}\right)^2 + \frac{2}{20} (14 \times 1,51 \times 3 + 15 \times 4,52 \times 33)} = 11,35 \text{ cm}$$

De la ecuacion 19) se tiene:

$$\sigma_b = \frac{120000}{\frac{20 \times 11,35}{2} (33 - 3,78) + 14 \times 1,51 \times \frac{8,35}{11,35} \times 30} = 31,7 \text{ kg cm}^2$$

$$\sigma'_e = \frac{15 \times 8,35}{11,35} \times 31,7 = 350 \text{ kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{21,65}{8,35} \times 350 = 908 \text{ kg por cm}^2$$

Para calcular el cizalle, se deberá determinar primero el valor de  $y_1$  aplicando la ecuacion 24):

$$y_1 = \frac{\frac{20 \times 11,35^3}{3} + 14 \times 8,35^2 \times 1,51}{\frac{20 \times 11,35^2}{2} + 14 \times 8,35 \times 1,51} = 7,67 \text{ cm}$$

Ya que se tiene una carga uniforme de 600 kg por metro lineal, se tiene:

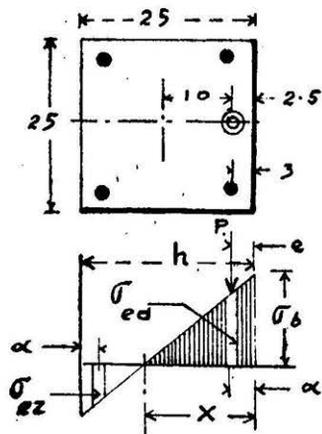
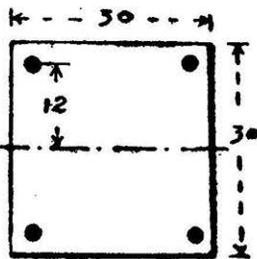
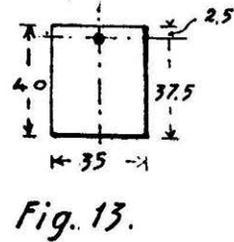
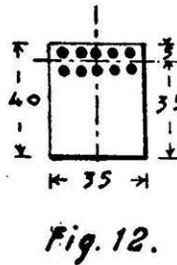
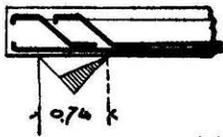
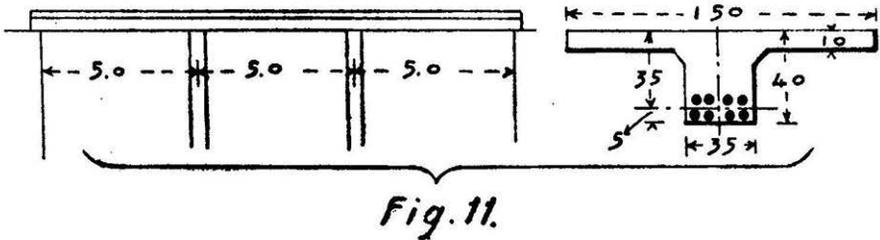
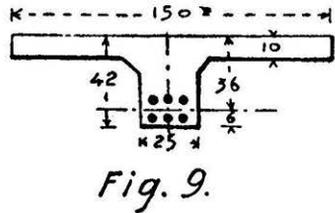
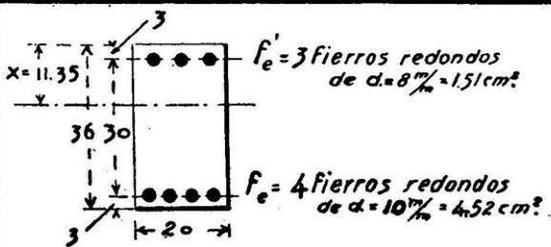
$$V = 2 \times 600 = 1200 \text{ kg.}$$

i

$$\tau_0 = \frac{1200}{20 (21,65 + 7,67)} = 2,05 \text{ kg por cm}^2$$

$$\tau_1 = \frac{20 \times 2,05}{4 \times 1 \times 3,14} = 3,27 \text{ kg por cm}^2$$

En la armadura superior se tiene:



$$S = 20 \frac{11,35^2 - 8,35^2}{2} + 15 \times 1,51 \times 8,35 = 780$$

$$J = \frac{120000 \times 11,35}{31,7} = 42970$$

$$\tau'_0 = \frac{1200 \times 780}{20 \times 42970} = 1,09 \text{ kg por cm}^2$$

$$\tau'_1 = \frac{20 \times 1,09}{3 \times 0,8 \times 3,14} = 2,9 \text{ kg por cm}^2$$

Tomando en cuenta esfuerzos de traccion del concreto la ecuacion 38) da:

$$x = \frac{\frac{20 \times 36^2}{2} + 14 \left( 1,51 \times 3 + 4,52 \times 33 \right)}{20 \times 36 + 14 (1,51 + 4,52)} = 18,8 \text{ cm}$$

Segun la ecuacion 39) se tiene:

$$\sigma_{bd} = \frac{120000 \times 18,8}{\frac{20 \times 18,8^3}{3} + \frac{20 \times 17,2^3}{3} + 14 \left( 1,51 \times 15,8^2 + 4,52 \times 14,2^2 \right)} = 23,4 \text{ kg por cm}^2$$

$$\sigma_{bz} = \frac{17,2}{18,8} \times 23,4 = 21,4 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = 15 \times \frac{14,2}{17,2} \times 21,4 = 265 \text{ Kg por cm}^2$$

El cizalle a la altura de la armadura superior, siendo  $J = 96410$ , es:

$$\tau_0 = \frac{1200}{96410} \left[ \frac{18,8^2 - 15,8^2}{2} + \frac{15 \times 1,51 \times 15,8}{20} \right] = 0,87 \text{ Kg por cm}^2$$

La adherencia:

$$\tau_1 = \frac{20 \times 0,87}{3 \times 0,8 \times 3,14} = 2,3 \text{ Kg por cm}^2$$

En el eje neutro se tiene:

$$\tau_0 = \frac{1200}{96410} \left( \frac{18,8^2}{2} + \frac{15 \times 1,51 \times 15,8}{20} \right) = 2,4 \text{ Kg por cm}^2$$

5. Una losa de 3 m de ancho por 4 m de largo, apoyada en todo su perimetro, quiere armarse con barras cruzadas, paralelas a los lados. El peso propio i sobrecarga sumados dan 600 Kg por m<sup>2</sup>. Se pide calcular el espesor de la losa i las barras de su armadura.

El momento solicitante con respecto a la luz menor es:

$$M = \frac{600 \times 3,1^2 \times 100}{12} = 48050 \text{ Kg cm.}$$

Las tasas admisibles sean:  $\sigma_e = 1000$  i  $\sigma_b = 40$  Kg por  $\text{cm}^2$ . Segun el cuadro II resulta:

$$h - \alpha = 0,39 \sqrt{\frac{48050}{100}} = 8,54 \text{ cm}$$

$$f_c = 0,00293 \sqrt{4805000} = 6,42 \text{ cm}^2$$

El espesor de la losa será 10 cm. Como armadura del lado menor se emplearán, por metro, 10 barras de 9 mm con una seccion total de  $6,36 \text{ cm}^2$ .

Las barras longitudinales pueden tener dimensiones menores: se podrá disminuir su número o dimension en la proporcion del ancho al largo de la losa. Son suficientes 8 barras del mismo diámetro anterior por metro de ancho.

6. Una losa con nervio (figura N.º 9) destinada a una casa de comercio, de 7,50 de luz i cuyos apoyos distan 7,80 m de eje a eje, será cargada con una sobrecarga de 500 Kg por m corrido. Las armaduras de hierro, que constarán de 6 barras de 2,5 cm de diámetro, tienen una seccion total de  $29,45 \text{ cm}^2$ . Se desea calcular las tasas máximas del concreto i del fierro.

El peso propio se compone

Del peso de la losa con nervio ( $1,5 \times 0,1 + 0,32 \times 0,25$ )	2400 =	552 Kg
Peso del relleno de escorias comprimidas, de 6 cm.	36	Kg
Peso del pavimento de cemento, de 2 cm espesor..	40	»
Peso del estuco del cielo. ....	14	»
Suma.....	90	Kg

Corresponde entónces para $1,5 \text{ m}^2 = 1,5 \times 90 =$	135 Kg
Agregando la sobrecarga.....	500 »
Suma.....	1 187 Kg

redondeando, se tomará 1 200 Kg por m lineal de viga. De donde:

$$M = \frac{1200 \times 7,8^2 \times 100}{8} = 912 600 \text{ Kg cm}$$

Segun la ecuacion 11):

$$x = \frac{\frac{150 \times 10^2}{2} + 15 \times 29,45 \times 36}{150 \times 10 + 15 \times 29,45} = 12,05 \text{ cm}$$

Segun la ecuacion 13):

$$y = 12,05 - 5 + \frac{10^2}{6(2 \times 12,05 - 10)} = 8,23 \text{ cm}$$

Segun la ecuacion 14):

$$\sigma_e = \frac{912\,600}{29,45(36 - 12,05 + 8,23)} = 963 \text{ Kg por cm}^2$$

Segun la ecuacion 15):

$$\sigma_b = \frac{12,05}{15(36 - 12,05)} \times 963 = 32,3 \text{ Kg por cm}^2$$

El esfuerzo de corte en el apoyo es:

$$V = \frac{7,5 \times 1200}{2} = 4\,500 \text{ Kg}$$

De esto se deduce el esfuerzo de cizalle del concreto:

$$\tau_o = \frac{V}{b_1(h - \alpha - x + y)} = \frac{4\,500}{25(36 - 12,05 + 8,23)} = 5,6 \text{ Kg por cm}^2.$$

Como la tasa admisible se ha sobrepasado algo, se recomienda doblar hácia arriba 2 barras de la armadura. La seccion en que deberá iniciarse la dobladura se deducirá de la condicion siguiente: que el esfuerzo de corte  $V_1$  en esta seccion solo tenga por valor:

$$\frac{4\,500 \times 4,5}{5,6} = 3\,616 \text{ Kg.}$$

Esta seccion se encuentra a:  $\frac{4\,500 - 3\,616}{1\,200} = 0,74 \text{ m}$  del apoyo (fig. 10).

El total de tracciones  $Z$  correspondiente a las barras dobladas es igual al esfuerzo de cizalle que ellas soportan, es decir:

$$Z = \frac{74}{1,2} - (5,6 - 4,5) \frac{1}{2} \times 25 = 720 \text{ Kg.}$$

La tension de las barras dobladas es, por consiguiente:

$$\sigma_e = \frac{720}{2 \times 4,91} = 73 \text{ Kg por cm}^2$$

La adherencia de las 4 barras inferiores restantes resulta en el apoyo:

$$\tau_1 = \frac{b_1 \tau_o}{u} = \frac{25 \times 5,6}{4 \times 2,5 \times 3,14} = 4,5 \text{ Kg por cm}^2$$

Si en este caso se quiere tambien determinar la traccion resultante del concreto, se determinará primero  $x$  por la ecuacion 32):

$$x = \frac{\frac{25 \times 42^2}{2} + \frac{125 \times 10^2}{2} + 15 \times 29,45 \times 36}{25 \times 42 + 125 \times 10 + 15 \times 29,45} = 16,12 \text{ cm}$$

segun ecuacion 13):

$$y = 16,12 - 5 + \frac{100}{6(32,24 - 10)} = 11,87 \text{ cm}$$

la ecuacion 33 a) da:

$$M = 912600 = \left( \frac{150 \times 10 \times 11,87}{2} (2 \times 16,12 - 10) + \frac{25}{3} (6,12^3 + 25,88^3) + 15 \times 29,45 \times 19,88^2 \right) \frac{\sigma_{b,d}}{16,12}$$

de donde:

$$\sigma_{b,d} = 28,4 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_{b,z} = \frac{25,88}{16,12} \times 28,4 = 45,6 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = 15 \times \frac{19,88}{16,12} \times 28,4 = 525 \text{ Kg por cm}^2$$

La tasa de 45,6 Kg por cm<sup>2</sup> es demasiado grande. El ancho del nervio i la seccion de la armadura de hierro deberán ser aumentadas.

7. Una losa con nervio, continúa sobre 4 apoyos, de la seccion de la figura 11, destinada a una casa comercial, será cargada con 500 Kg por m. Se desea calcular las tasas máximas resultantes del material.

El peso propio para 1 m corrido de viga es:  $(1,5 \times 0,10 + 0,3 \times 0,35) 2400 = 612 \text{ Kg}$   
 Agregando el peso permanente del ejemplo anterior..... = 135 »

Suma = 747 Kg

Redondeando, se adoptará 750 Kg por metro lineal.

El cálculo se hará segun el procedimiento corriente de vigas continuas de igual momento de inercia. No se considerarán las variaciones debidas a cambio de espesores i situacion relativa de las barras de fierro; ni tampoco los aumentos eventuales sobre los apoyos. Estas últimas variaciones hacen aumentar el grado de seguridad de la construccion.

Los momentos solicitantes resultan:

a) En la seccion 0,4 l del primer tramo:

$$\begin{aligned} M_g &= + 0,08 \times 750 \times 5,0^2 \times 100 = + 150000 \\ - M_p &= - 0,02 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = - 25000 \\ + M_p &= + 0,10 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = + 125000 \end{aligned}$$

de donde:  $M_{\max} = + 275000$

b) En los apoyos centrales:

$$\begin{aligned} M_g &= -0,10 \times 750 \times 5,0^2 \times 100 = -187500 \\ -M_p &= -0,11667 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = -145838 \\ +M_p &= +0,01667 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = +20838 \\ &\text{de donde: } M_{\max} = -333338 \end{aligned}$$

c) En el tramo central:

$$\begin{aligned} M_g &= +0,025 \times 750 \times 5,0^2 \times 100 = +46875 \\ -M_p &= -0,05 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = -62500 \\ +M_p &= +0,075 \times 500 \times 5,0^2 \times 100 = +93750 \\ &+ M_{\max} = +140625 \\ &- M_{\max} = -15625 \end{aligned}$$

Segun esto se calculan las tensiones:

a) En la seccion 0,4 l del primer tramo.

La armadura de fierro consta de 8 barras de 15 mm de diámetro i de 14,14 cm<sup>2</sup> de seccion total, distante 5 cm de la arista inferior.

Como el eje neutro cae dentro de la seccion de la losa, se encuentra su situacion aplicando la ecuacion 2) i se tiene:

$$x = \frac{15 \times 14,14}{150} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \times 150 \times 35}{15 \times 14,14}} - 1 \right) = 8,63 \text{ cm}$$

$\sigma_b$  i  $\sigma_e$  se deducen las ecuaciones 4) i 5):

$$\sigma_b = \frac{2 \times 275000}{150 \times 8,63 \times 32,12} = 13,2 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{275000}{14,14 \times 32,12} = 606 \text{ Kg por cm}^2$$

b) En los apoyos intermedios.

Para el momento negativo, se considerarán solamente las barras trasladadas hacia arriba, ya que el concreto no deberá sufrir esfuerzos de traccion.

Deberán agregarse dos barras mas de 15 mm de diámetro, de manera que la seccion total resulte de 17,67 cm<sup>2</sup>. (fig. 12).

Con la ecuacion 2) se determina la posicion del eje neutro.

$$x = \frac{15 \times 17,67}{35} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \times 35 \times 35}{15 \times 17,67}} - 1 \right) = 16,66 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \times 333338}{35 \times 16,66 \times 29,45} = 38,8 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{333338}{17,67 \times 29,45} = 640 \text{ Kg por cm}^2$$

c) En el tramo del medio:

El momento máximo positivo es bastante menor que en la sección 0,4 l del primer tramo. Bastan 4 barras con un sección total igual a 7,07 cm<sup>2</sup>.

$$x = \frac{15 \times 7,07}{150} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \times 150 \times 37,25}{15 \times 7,07}} - 1 \right) = 6,58 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \times 140625}{150 \times 6,58 \times 35,06} = 8,1 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{140625}{7,07 \times 35,06} = 565 \text{ Kg por cm}^2$$

Para el momento negativo, -15625, es suficiente colocar en la parte superior una barra de 1 cm de diámetro, con 0,79 cm<sup>2</sup> de sección; (fig. 13) resulta:

$$x = \frac{15 \times 0,79}{35} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \times 35 \times 37,5}{15 \times 0,79}} - 1 \right) = 4,71 \text{ cm}$$

$$\sigma_c = \frac{15625}{0,79 \times 35,93} = 550 \text{ Kg por cm}^2$$

Si se quiere también aquí considerar los esfuerzos de tracción del concreto en la sección 0,4 l del primer tramo, se tiene:

$$x = \frac{\frac{35 \times 40^2}{2} + \frac{115 \times 10^2}{2} + 15 \times 14,14 \times 35}{35 \times 40 + 115 \times 10 + 15 \times 14,14} = 14,9 \text{ cm}$$

$$y = 14,9 - 5 + \frac{10^2}{6(29,8 - 10)} = 10,74 \text{ cm}$$

Entonces se tiene, según la ecuación 33 a):

$$275000 = \frac{\sigma_{bd}}{14,9} \left[ \frac{150}{2} \times 10 \times 10,74 (29,8 - 10) + \frac{35}{3} (4,9^3 + 25,1^3) + 15 \times 14,14 \times 20,1^2 \right]$$

$$275000 = 29000 \sigma_{bd}$$

$$\sigma_{bd} = \frac{275000}{29000} = 9,5 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_{bz} = \frac{25,1}{14,9} \times 9,5 = 16 \text{ Kg por cm}^2$$

La determinacion de los esfuerzos de cizalle i de adherencia se efectúa conforme a los ejemplos ya tratados.

8. Un pilar de concreto armado (fig. 14) de  $30 \times 30$  cm de seccion, armado con 4 barras de 16 cm seccion total, está cargado céntricamente con 30 000 Kg. Se quiere determinar las tensiones del concreto i del fierro.

Segun ecuacion 43) a 45) se obtiene:

$$30000 = \sigma_b (30 \times 30 + 15 \times 16)$$

$$\sigma_b = \frac{30000}{1140} = 26,3 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_c = 15 \times 26,3 = 395 \text{ Kg por cm}^2$$

9. Se quiere determinar la ruptura del mismo pilar anterior siendo su altura 4 m. Segun la fórmula de Euler:

$$P = \frac{\pi^2 E J}{s^2}$$

Para el concreto se adopta:  $E = \frac{2100000}{15} = 140000$ , i  $s =$  coeficiente de seguridad = 10.

$$J = \frac{30^4}{12} + 15 \times 4 \times 4,0 \times 12^2 = 102060$$

Entonces

$$P = \frac{10 \times 140000 \times 102060}{10 \times 160000} = 89303 \text{ Kg}$$

Como para  $P$  se considera en el ejemplo anterior 30000 Kg, se ve que el concreto no presenta peligro de ruptura.

Para que tampoco se produzca ruptura en la armadura, deberá tenerse:

$$\frac{\pi^2 E J}{5 l^2} = F k$$

La tension  $k$  del fierro resultó 395 Kg por  $\text{cm}^2$ , i como se tiene para las barras:

$$F = \frac{\pi d^2}{4}; J = \frac{\pi d^4}{64}$$

se tiene:

$$\frac{J}{F} = \frac{d^2}{16}$$

Resulta como longitud admisible para las barras:

$$l = d \sqrt{\frac{10 \times 2100000}{80 \times 395}} = 25,8 d$$

Para evitar entonces la ruptura de las barras, la separacion de las barras transversales será a lo mas de  $25,8 \times 2,26 = 58$  cm.

Estas separaciones, segun el § 15 inciso 6, podrán ser a lo mas de 30 cm.

10. Un pilar de concreto armado (fig. 15), de  $25 \times 25$  cm. de seccion i con 4 barras de 2 cm de diámetro, se cargará excéntricamente con 5000 Kg, siendo la descen-tracion igual a 10 centímetros. Se quiere determinar los esfuerzos del concreto i del fierro.

Para la resolucion, se dispone de las dos condiciones siguients:

1). La suma de los esfuerzos exteriores e interiores deben ser cero;  $\Sigma V = 0$ .

2). La suma de los momentos estáticos de los esfuerzos que obran en la seccion deben ser cero;  $\Sigma M = 0$ .

Finalmente se tiene la condicion de que las tensiones son proporcionales a sus distancias al eje neutro, multiplicadas por el módulo de elasticidad. Es decir:

$$\begin{aligned}\sigma_b : \sigma_{e d} &= x : n (x - \alpha) \\ \sigma_b : \sigma_{e z} &= x : n (h - \alpha - x)\end{aligned}$$

De la condicion primera se deduce:

$$\begin{aligned}a). \quad P &= \frac{b x}{2} \sigma_b + n f_e \sigma_b \left( \frac{x - \alpha}{x} \frac{h - \alpha - x}{x} \right) \\ &= \sigma_b \left( \frac{b x}{2} + \frac{n f_e}{x} (2 x - h) \right)\end{aligned}$$

i de la condicion segunda:

$$\begin{aligned}b). \quad P(x - e) &= \sigma_b \frac{b x^2}{3} + n f_e \sigma_b \left( \frac{(x - \alpha)^2}{x} + \frac{(h - \alpha - x)^2}{x} \right) \\ &= \sigma_b \left( \frac{b x^2}{3} + \frac{n f_e}{x} (2 x^2 - 2 h x + 2 \alpha^2 + h^2 - 2 \alpha h) \right)\end{aligned}$$

Si se igualan los valores de  $\sigma_b$  de ambas ecuaciones se tiene:

$$\frac{b}{6 n f_e} x^3 - \frac{b e}{2 n f_e} x^2 - (2 e - h) x = 2 \alpha^2 + h^2 - (2 \alpha + e) h$$

i si se introducen los valores:  $b = 25$ ;  $n = 15$ ;  $f_e = 6,28$ ;  $e = 2,5$ ;  $h = 25$ ;  $\alpha = 3$ :

$$\begin{aligned}\frac{25}{6 \times 15 \times 6,28} x^3 - \frac{25 \times 2,5}{2 \times 15 \times 6,28} x^2 + 20 x &= 2 \times 3^2 + 25^2 - 8,5 \times 25; \\ x^3 - 7,5 x^2 + 452,16 x &= 9734\end{aligned}$$

la resolucion se efectuará por tanteos. Resulta con la suficiente aproximacion:

$$x = 16,3 \text{ cm}$$

Entonces según la ecuación a):

$$5000 = \sigma_b \left( \frac{25 \times 16,3}{2} + \frac{15 \times 6,28}{16,3} - 7,6 \right)$$

$$\sigma_b = 20,2 \text{ Kg por cm}^2$$

tambien:

$$\sigma_{e d} = \frac{15 \times 13,3 \times 20,2}{16,3} = 249 \text{ Kg por cm}^2$$

$$\sigma_{e z} = 249 \times \frac{5,7}{13,3} = 107 \text{ Kg por cm}^2$$

Berlin, 24 de Mayo de 1907.