# El Catálogo Fotográfico del Cielo.

*Fórmulas para convertir las coordenadas rectilíneas de las estrellas de las placas fotográficas en coordenadas ecuatoriales, y aplicación de esas fórmulas a una de las placas de la zona encomendada al Observatorio Astronómico de Santiago.*

POR

ISMAEL GAJARDO REYES

Sub-director del Observatorio Astronómico Nacional y Jefe de la Sección Astrofotográfica.

(Trabajo leído en el *Instituto de Ingenieros de Chile*, el Martes 4 de Agosto de 1917).

## INTRODUCCION

De todas las grandes empresas por medio de las cuales se manifiesta la actividad fecunda del espiritu humano, ninguna demuestra tal vez mejor que la *Carta Fotográfica del Cielo* el admirable poder de solidaridad internacional que la *Ciencia* estimula y desarrolla.

Cuando el ilustre Arago anunció a la *Academia de Ciencias* de París, en una sesión memorable, el gran descubrimiento de Niepce y de Daguerre, indicó inmediatamente algunas de las aplicaciones prácticas que podría tener en la Astronomía; pero jamás pudo imaginar, a pesar de lo atrevido que fué en sus previsiones, que se emprendería en pocos años más la carta completa de la bóveda celeste, en la cual estuvieran dibujados no solamente los 5 000 o 6 000 astros que se ven a la simple vista, sino también esos millones de estrellas, hasta las de más ínfima magnitud, que se ven únicamente con los más poderosos instrumentos ópticos.

Esta es la obra en que están hoy empeñados unos dieciocho observatorios astronómicos, y que, al dejar estampadas en las cartas del cielo todos los grupos de estrellas y todos los astros esparcidos en los 42 000 grados cuadrados de la esfera celeste, legará a los siglos futuros el estado actual del universo estelar con una autenticidad y una exactitud notables.

¿Cuáles son los movimientos que impulsan, en el transcurso de los siglos, a las innumerables estrellas diseminadas en el espacio? ¿Cuál es la ley de su distribución en el cielo y de sus distancias a nuestro mundo? ¿Cuál es el centro misterioso hacia el cual gravita nuestro Sol, arrastrando consigo a todo su cortejo de planetas y con una velocidad hoy sensible?

Esos grandes problemas que parecían desafiar a la ciencia humana, y que presentaban dificultades insuperables, son los que va a permitir abordar metódicamente la *Carta del Cielo* y con la seguridad de alcanzar éxito.

¿No tenemos entonces razón para decir que la *Carta Fotográfica del Cielo* será ante los ojos de los sabios del porvenir el monumento más grandioso y más fecundo legado por los pasados siglos?

Habría deseado hacer, en esta ocasión, una reseña histórica de la fotografía estelar y de su marcha hasta la reunión del célebre *Congreso Astrofotográfico del año 1887*, en que tomaron parte cincuenta y seis sabios de dieciseis diversas naciones, como también habría deseado dar algunos detalles sobre la organización del trabajo para la ejecución del *Catálogo Fotográfico del Cielo*, y hacer, después, una descripción de los instrumentos que se emplean para la obtención y la medida de los clisés fotográficos; pero todo esto daría una extensión a esta memoria que no puedo darle.

Por otra parte, ya todo eso ha sido tratado por el distinguido ingeniero señor J. Taulis, en su importante artículo que salió a luz en el *Anuario del Observatorio Astronómico para el año 1897*, bajo el epígrafe *Fotografía Celeste*. Yo también me ocupé de esto en el opúsculo que tuve el honor de presentar al *Segundo Congreso Científico Pan-Americano* y cuya versión castellana se encuentra al principio de la 3.ª Parte en el *Anuario Astronómico* para el año actual.

Así, pues, en esos dos artículos se encuentran explicados todos los métodos y operaciones que hay necesidad de efectuar hasta obtener las *coordenadas rectilíneas medidas de las estrellas*, con respecto a un sistema de ejes que pasan por el centro de la placa fotográfica.

Me veo entonces en la necesidad de suponer que el auditorio conoce ya todas esas operaciones preliminares y pasaré, en consecuencia, a ocuparme solamente de la reducción de los clisés astrofotográficos.

## I. Fórmulas para convertir las coordenadas rectilíneas de las estrellas de las placas fotograficas en coordenadas ecuatoriales.

El problema de la determinación de las coordenadas ecuatoriales de las estrellas de una placa fotográfica puede formularse, de una manera abstracta, así: se tiene una placa que representa una perspectiva fotográfica de una porción del cielo; se conocen las *coordenadas angulares* (1) de un cierto número de estrellas

(1) Las *coordenadas angulares* de las estrellas se obtienen muy fácilmente restando las coordenadas ecuatoriales del centro de la placa de las coordenadas ecuatoriales de las estrellas, es decir, se obtiene el valor angular de $(\alpha - \alpha_0)$ y de $(\delta - \delta_0)$.

dibujadas sobre la placa y sus coordenadas rectilíneas con respecto a dos ejes, x, y, trazados sobre la misma, y se trata de determinar las coordenadas angulares de una estrella cualquiera sobre la placa, partiendo de sus coordenadas rectilíneas con respecto a dichos ejes.

Debe advertirse que el origen de las coordenadas rectilíneas *queda muy cerca del punto* donde el eje óptico intercepta a la placa y que la *dirección de los ejes es sensiblemente la de las trazas*, sobre la placa, del meridiano que pasa por el punto cero, o, más bien dicho, por el centro de la placa, y de su perpendicular, pues estas dos condiciones dan lugar a grandes simplificaciones que permiten llegar a una solución práctica del problema.

Si los ejes x, y coincidiesen exactamente con la traza del meridiano, que pasa por el eje óptico, y con su perpendicular, la cuestión de determinar las coordenadas $\alpha$ y $\delta$ de una estrella, conocidas las del centro cero $(\alpha_0, \delta_0)$, sería una cuestión puramente geométrica. Hay en efecto fórmulas que ligan las coordenadas rectilíneas, $\xi$, $\eta$, con las ecuatoriales. Esas fórmulas son:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\cos\delta \operatorname{sen}(\alpha-\alpha_0)}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)} \\ \eta &= \frac{\operatorname{sen}\delta\cos\delta_0 - \operatorname{sen}\delta_0\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)}{\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (1)$$

que se obtienen muy fácilmente del modo siguiente:

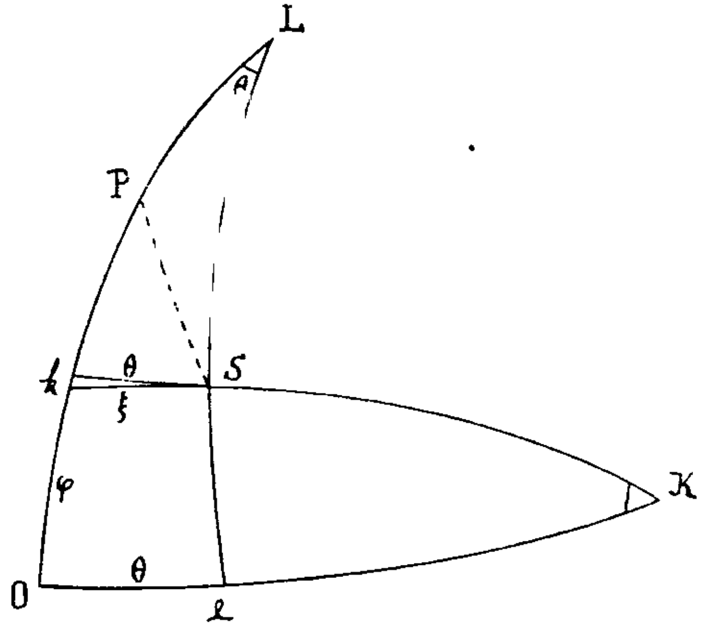


Fig. 1

En efecto, sea O el centro de una placa; K y L sus polos en la esfera celeste; P el polo Norte del cielo. (Fig. 1).

Llamemos $\alpha_0$ la ascensión recta del centro O; P su distancia al polo Norte; $\alpha$ y p la ascensión recta y la distancia al polo Norte de una estrella cualquiera S de la placa.

Entonces tenemos:

$$PO = P; \; PS = p = 90^\circ - \delta \; ; \; LP = 90^\circ - P = \delta_0 \; ;$$
$$\sphericalangle \, OPS = \alpha - \alpha_0 \; ; \; \sphericalangle \, LPS = 180^\circ - \alpha + \alpha_0 \; ; \; PLS = \theta \; ; \; \tan \theta = \xi$$

Ahora bien, la Trigonometría Esférica nos da esta fórmula:

$$\cot C = \frac{\text{sen b cos c} - \text{cos b senc cos A}}{\text{sen c sen A}}$$

que aplicada al triángulo esférico PLS se convierte en:

$$\cot PLS = \frac{\text{sen LP cos PS} - \text{cos LP sen PS cos LPS}}{\text{sen PS sen LPS}}$$

o bien

$$\cot PLS \text{ sen PS sen LPS} = \text{sen LP cos PS} - \text{cos LP sen PS cos LPS}$$

y, dividiendo los dos miembros por sen PS, se tendrá:

$$\cot PLS \text{ sen LPS} = \text{sen LP} \cot PS - \text{cos LP cos LPS}$$

de donde

$$-\cot PS \text{ sen LP} = -\text{cos LP cos LPS} - \cot PLS \text{ sen LPS}$$
$$\cot PS \text{ sen LP} = \text{cos LP cos LPS} + \text{sen LPS} \cot PLS$$

y, substituyendo en esta última expresión los valores que dimos al principio, tendremos:

$$\cot (90^\circ - \delta) \text{ sen } \delta_0 = \cos \delta_0 \cos (180^\circ - \alpha + \alpha_0) + \text{sen } (180^\circ - \alpha + \alpha_0) \cot \theta$$

de la cual se obtiene fácilmente esta otra:

$$\tan \delta \text{ sen } \delta_0 = -\cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0) + \text{sen } (\alpha - \alpha_0) \frac{1}{\tan \theta}$$

o bien

$$\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 = - \cos \delta_0 \cos (a - a_0) + \operatorname{sen} (a - a_0) \frac{1}{\xi}$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sen} (a - a_0)}{\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta_0 \cos (a - a_0)}$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sen} (a - a_0)}{\frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta_0 \cos (a - a_0)}$$

$$\xi = \frac{\cos \delta \operatorname{sen} (a - a_0)}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (a - a_0)}$$

Ahora, en el triángulo esférico P k S, se tiene:

$$k\,P = P - \phi;\ PkS = 90^\circ;\ \cot PkS = o;\ kPS = a - a_0$$

y, aplicándole a dicho triángulo la misma fórmula de la Trigonometría Esférica, tendremos:

$$\cot PkS = \frac{\operatorname{sen} k\,P \cos PS - \cos k\,P \operatorname{sen} PS \cos k\,PS}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} k\,PS}$$

o bien

$$\cot P\,k\,S \operatorname{sen} PS \operatorname{sen} k\,PS = \operatorname{sen} k\,P \cos PS - \cos k\,P \operatorname{sen} PS \cos k\,PS$$

y, dividiendo los dos miembros por sen P S, se tendrá;

$$\cot P\,k\,S \operatorname{sen} k\,PS = \cot PS \operatorname{sen} k\,P - \cos k\,P \cos k\,PS$$

de donde

$$- \cot PS \operatorname{sen} k\,P = - \cos k\,P \cos k\,PS - \operatorname{sen} k\,PS \cot P\,k\,S$$
$$\cot PS \operatorname{sen} k\,P = \cos k\,P \cos k\,PS + \operatorname{sen} k\,PS \cot P\,k\,S$$

y, substituyendo en esta última expresión los valores que dimos anteriormente, tendremos:

$$\cot p \operatorname{sen} (P - \phi) = \cos (P - \phi) \cos (a - a_0)$$

de donde

$$\cot p \frac{\operatorname{sen}(P-\phi)}{\cos(P-\phi)} = \cos(\alpha-\alpha_0)$$

$$\cot p \tan(P-\phi) = \cos(\alpha-\alpha_0)$$
$$\tan(P-\phi) = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p$$

Ahora, según una fórmula trigonométrica muy conocida, tendremos:

$$\tan(P-\phi) = \frac{\tan P - \tan\phi}{1+\tan P\tan\phi} = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p$$

luego

$$\tan P - \tan\phi = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p + \tan P\tan\phi\tan p\cos(\alpha-\alpha_0)$$

$$-\tan\phi = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p - \tan P + \tan P\tan\phi\tan p\cos(\alpha-\alpha_0)$$

O bien

$$-\tan\phi - \tan P\tan\phi\tan p\cos(\alpha-\alpha_0) = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p - \tan P$$

$$-\tan\phi\,\{1+\tan P\tan p\cos(\alpha-\alpha_0)\} = \cos(\alpha-\alpha_0)\tan p - \tan P$$

$$-\tan\phi = \frac{\cos(\alpha-\alpha_0)\tan p - \tan P}{1+\tan P\tan p\cos(\alpha-\alpha_0)}$$

Pero, recordando que $p = 90^\circ - \delta$; $P = 90^\circ - \delta_0$; y $\eta = \tan\phi$, la última expresión tomará esta forma:

$$\eta = -\frac{\cos(\alpha-\alpha_0)\cot\delta - \cot\delta_0}{1+\cot\delta_0\cot\delta\cos(\alpha-\alpha_0)}$$

de donde

$$\eta = -\frac{\cos(\alpha-\alpha_0)\dfrac{\cos\delta}{\operatorname{sen}\delta} - \dfrac{\cos\delta_0}{\operatorname{sen}\delta_0}}{1+\dfrac{\cos\delta_0}{\operatorname{sen}\delta_0}\cdot\dfrac{\cos\delta}{\operatorname{sen}\delta}\cos(\alpha-\alpha_0)}$$

$$\eta = -\frac{\dfrac{\cos\delta \operatorname{sen}\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \operatorname{sen}\delta \cos\delta_0}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0}}{\dfrac{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0}}$$

$$\eta = -\frac{\cos\delta \operatorname{sen}\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \operatorname{sen}\delta \cos\delta_0}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{sen}\delta \cos\delta_0 - \cos\delta \operatorname{sen}\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta_0 + \cos\delta \cos\delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}$$

Las fórmulas del grupo (1) tienen un carácter general, y es fácil comprobar que ellas son idénticas para una placa cuyo centro se proyecte sobre un punto del hemisferio celeste austral.

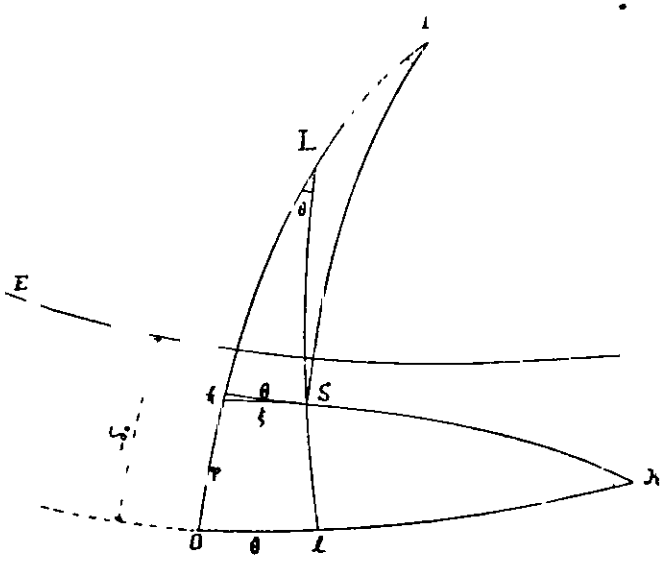


Fig. 1. bis

En efecto, en la Fig. 1 bis tenemos:

LO $= 90^\circ$; PO $=$ P $= 90^\circ - (-\delta_0) = 90^\circ + \delta_0$; PL $=$ PO $-$ LO $= 90^\circ + \delta_0 - 90^\circ = \delta_0$; PS $= p = 90^\circ - (-\delta) = 90^\circ + \delta$; $\sphericalangle$LPS $= \alpha - \alpha_0$; $\sphericalangle$SLP $= 180^\circ - \theta$; $\sphericalangle$OLS $= \theta$; $\tan\theta =$

Y aplicándole al triángulo esférico PLS la misma fórmula

$$\cot C = \frac{\operatorname{sen} b \cos c - \cos b \operatorname{sen} c \cos A}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}$$

se tiene

$$\cot SLP = \frac{\operatorname{sen} PL \cos PS - \cos PL \operatorname{sen} PS \cos LPS}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} LPS}$$

de donde

$$\cot SLP \operatorname{sen} PS \operatorname{sen} LPS = \operatorname{sen} PL \cos PS - \cos PL \operatorname{sen} PS \cos LPS$$

Y, dividiendo por sen PS los dos miembros de esta expresión, se tendrá:

$$\cot SLP \operatorname{sen} LPS = \operatorname{sen} PL \cot PS - \cos PL \cos LPS$$

O bien

$$\begin{aligned}
-\cot PS \operatorname{sen} PL &= -\cos PL \cos LPS - \cot SLP \operatorname{sen} LPS \\
\cot PS \operatorname{sen} PL &= \cos PL \cos LPS + \operatorname{sen} LPS \cot SLP \\
\cot (90^o + \delta) \operatorname{sen} \delta_0 &= \cos \delta_0 \cos (a - a_0) + \operatorname{sen} (a - a_0) \cot (180^o - \theta) \\
-\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 &= \cos \delta_0 \cos (a - a_0) - \operatorname{sen} (a - a_0) \cot \theta
\end{aligned}$$

$$\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 = - \cos \delta_0 \cos (a - a_0) + \operatorname{sen} (a - a_0) \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 = - \cos \delta_0 \cos (a - a_0) + \operatorname{sen} (a - a_0) \frac{1}{\xi}$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sen} (a - a_0)}{\tan \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta_0 \cos (a - a_0)}$$

$$\xi = \frac{\cos \delta \operatorname{sen} (a - a_0)}{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (a - a_0)}$$

En las fórmulas que preceden, $\xi$ y $\eta$ están expresadas en partes de radio (radiantes) y como las coordenadas se miden en cuadros de la red y partes de cuadro, sería necesario tener el valor de un cuadro en radiantes, o el valor angular de una parte de la red. Este valor es aproximadamente $\frac{5}{3438}$ (un cuadro de la red tiene 5 mm. y la distancia focal es aproximadamente de 3.44 m.) deducida del valor angular de una parte de la red, que es de 300" (*) y se puede determinar en la hipótesis que nos hemos colocado, midiendo la $\xi$ o la $\eta$ de una estrella de posición conocida.

Pero las condiciones que esto supone no se satisfacen nunca, de donde resulta que si se calculan las $\xi$ y $\eta$ de una o más estrellas de posición conocida, sus valores serán diferentes de las coordenadas x, y medidas en la placa.

Las correcciones que deben hacerse a las coordenadas x, y medidas, para que por la aplicación de las fórmulas (1) se obtengan las coordenadas ecuatoriales, dependen no sólo de la imperfección de los ajustes del instrumento, sino de los efectos de la *refracción* y de la *aberración*, que hacen variar la posición relativa de las estrellas. Si el instrumento está bien ajustado (y no se trata de estrellas muy cercanas al polo) esas correcciones son de forma lineal, asi es que podemos poner:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + ax + by + c \\ \eta &= y + dx + ey + f \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (2)$$

en las que

*c* y *f* son las coordenadas del centro de la red con respecto al centro de la placa;

*b* y *d* dependen casi en su totalidad del error de orientación de la red; y

*a* y *e* son las constantes que se designan con los nombres de ***constantes de orientación*** y ***foco*** y dependen casi en totalidad de que el valor supuesto a un cuadro de la red no sea su valor angular, que es de 5', pues el valor angular de una parte de la red depende no solamente de la distancia focal del anteojo sino de la magnitud del cuadro.

Por consiguiente, se ve que las diferencias entre las coordenadas $\xi$ y x ó $\eta$ e y provienen, en gran parte, de pequeños movimientos de traslación y de rotación de los ejes que pasan por el centro de la red, los cuales, al confundirse con los que pasan por el centro de la placa, deberían hacer $\xi - x = o$.

Esos movimientos de traslación y de rotación de los ejes son producidos por mala orientación y centralización de la red en el chassis o por varias otras causas.

La forma lineal de esos movimientos de traslación y rotación de los ejes se puede demostrar así:

---

(*) En efecto, según la fórmula $\frac{b}{c} = \tan \beta$, de los triángulos rectilíneos rectángulos, el valor en radiantes de un cuadro de la red es $\frac{5}{3438} = 0{,}001454$, y como el valor de un radiante en segundos es 206 264", 806.

Entonces, el valor angular de un cuadro de la red es
206 264", 806 × 0,001454 = 300" aproximadamente.

Un teorema de Geometría Analítica dice: *las antiguas coordenadas* $(\xi, \eta)$ *son iguales a las nuevas coordenadas* (x', y') *aumentadas en el monto de traslación del eje respectivo* Por consiguiente, según la Fig. A se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x' + c \\ \eta = y' + f \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

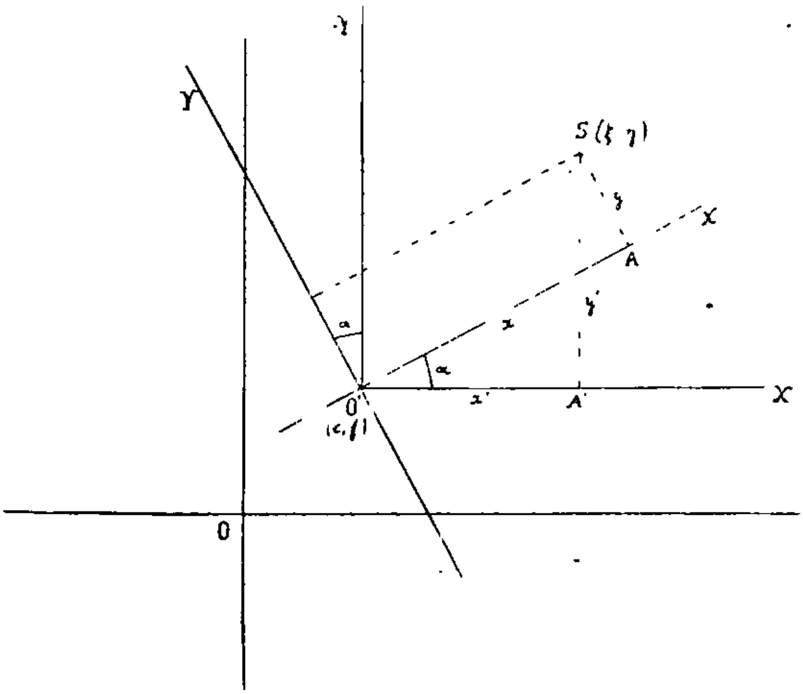


Fig. A

Y sabemos también que los dos contornos O'A'S y O'AS tienen la misma resultante, que es la recta O'S.

Por la teoría de las proyecciones, tendremos entonces:

$$\text{pr. O'A'} + \text{pr. A'S} = \text{pr. O'A} + \text{pr. AS}$$

Ahora bien, el teorema de la proyección de una línea definida sobre otra cualquiera indefinida dice: *que la proyección es igual a la longitud de la línea proyectada multiplicada por el coseno del ángulo que las dos líneas forman entre sí.*

Entonces, proyectando sobre el eje indefinido O'X', se tiene:

$$\text{O'A'} \cos o + \text{A'S} \cos \text{Y'O'X'} = \text{O'A} \cos \text{X O'X'} + \text{AS} \cos \text{YO'X'}$$

de donde

$$x' + y' \cos 90^o = x \cos \alpha + y \cos (90^o + \alpha)$$
$$x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$$

Y substituyendo este valor, de x', en la primera relación del grupo (I), se tiene:

$$\xi = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + c$$

Del mismo modo, proyectando sobre el eje O'Y', obtendremos:

$$O'A' \cos X'O'Y' + A'S \cos o = O'A \cos XO'Y + AS \cos YO'Y'$$
$$x' \cos 90^o + y' = x \cos (90^o - \alpha) + y \cos \alpha$$

$$y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

Y substituyendo este valor, de y', en la segunda relación del grupo (I), se tiene:

$$\eta = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + f$$

En resumen, obtenemos estas dos relaciones de forma lineal:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + c \\ \eta &= x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + f \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (II)$$

En estas relaciones, no están incluídas las correcciones de refracción y de aberración; pero el profesor Rambaut, en un artículo publicado en Astr. Nachr. N.º 3125, ha demostrado que esas correcciones son también lineales. Por este motivo, las relaciones del grupo (II) toman la forma definitiva.

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= ax + by + c \\ \eta - y &= dx + ey + f \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Si se corrigiese previamente por refracción, o por ciertos términos de la corrección debida a ese fenómeno, las constantes *a* y *e* deberían ser iguales en magnitud y signo, como lo demuestran claramente las relaciones del grupo II; *b* y *d* en magnitud solamente, pues algunos de los términos de la corrección por refracción y los que miden el efecto de la aberración son de la misma forma que la corrección de orientación y valor angular de la red.

De todo lo anteriormente expuesto resulta que la secuela de la determinación de las coordenadas ecuatoriales de las estrellas de una placa, partiendo de las medidas rectilíneas x, y, será la siguiente:

I. Se calculan las coordenadas $\xi$, $\eta$ de tres estrellas, por lo menos, de posición conocida.

II. Se establecen entre las x, y, y las $\xi$, $\eta$ de esas estrellas dos sistemas de ecuaciones de la forma de las (2); estas ecuaciones resueltas nos dan las constantes a, b,c .. etc.

III. Conocidas las constantes, se calculan las $\xi$, $\eta$ de las estrellas de la placa, y de ellas se deducen sus coordenadas ecuatoriales.

Vamos a ocuparnos separadamente de cada una de esas operaciones.

Las coordenadas $\xi$ y $\eta$ de tres o más estrellas de posición conocida se pueden calcular por medio de las fórmulas del grupo (1), o por medio de esas mismas fórmulas desarrolladas en serie, según las potencias de $(\alpha-\alpha_0)$ y $(\delta-\delta_0)$, y tabulando en seguida cada uno de los términos de la serie; pero nosotros creemos que no hay necesidad de esto último, porque esas coordenadas, $\xi$, $\eta$, se obtienen con relativa facilidad, según veremos más adelante, por las fórmulas del grupo (1).

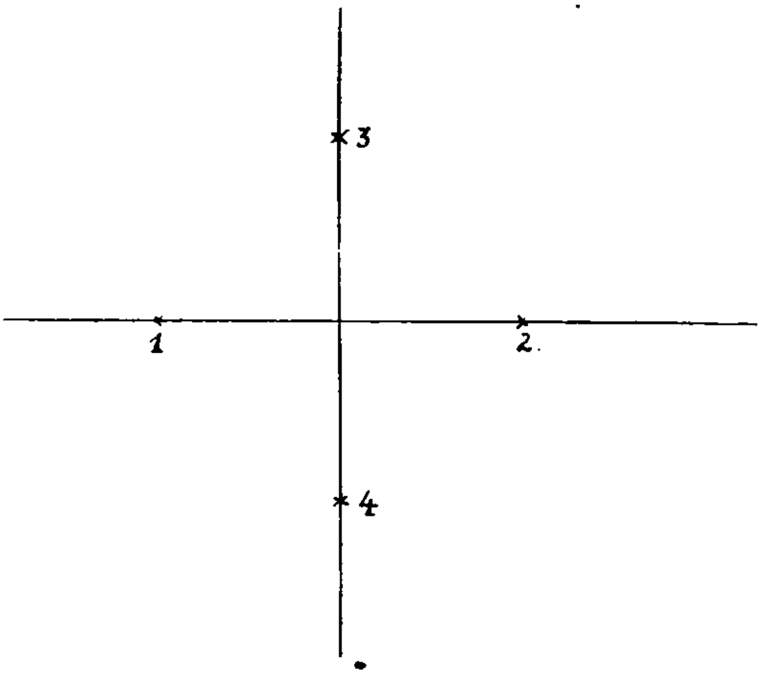


Fig. 2

Al deducir las constantes, de las ecuaciones de la forma (2), a que dan lugar las estrellas de referencia, la primera cuestión que se presenta es la elección de esas estrellas, a fin de que los efectos que producen los errores de las coordenadas rectilíneas y esféricas en las constantes sean lo menor posible. Evidentemente que una distribución de esas estrellas muy cómoda y ventajosa sería la representada en la figura 2. Las ecuaciones a las que esas cuatro estrellas dan lugar son las siguientes, en las que los elementos relativos a las cuatro estrellas los distinguimos por los índices 1, 2 . . . 4.

$$\left.\begin{aligned} x_1\, a + Y_1\, b + c &= m_1 \\ x_2\, a + Y_2\, b + c &= m_2 \\ X_3\, a + y_3\, b + c &= m_3 \\ X_4\, a + y_4\, b + c &= m_4 \end{aligned}\right\}\ \text{A} \qquad \begin{aligned} m_1 &= \xi_1 - x_1 \\ m_2 &= \xi_2 - x_2 \\ m_3 &= \xi_3 - X_3 \\ m_4 &= \xi_4 - X_4 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1\, d + Y_1\, e + f &= n_1 \\ x_2\, d + Y_2\, e + f &= n_2 \\ X_3\, d + y_3\, e + f &= n_3 \\ X_4\, d + y_4\, e + f &= n_4 \end{aligned}\right\}\ \text{B} \qquad \begin{aligned} n_1 &= \eta_1 - Y_1 \\ n_2 &= \eta_2 - Y_2 \\ n_3 &= \eta_3 - y_3 \\ n_4 &= \eta_4 - y_4 \end{aligned}$$

De las ecuaciones del grupo A deducimos inmediatamente los valores de las constantes *a*, *b* y *c* que son:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\,(y_4 - y_3) - (Y_2 - Y_1)\,(m_4 - m_3)}{(x_2 - x_1)\,(y_4 - y_3) - (Y_2 - Y_1)\,(X_4 - X_3)}$$

$$b = \frac{(m_2 - m_1) + (m_4 - m_3) - a\,\{(x_2 - x_1) + (X_4 - X_3)\}}{(Y_2 - Y_1) + (y_4 - y_3)}$$

$$c = \frac{(m_1 + m_2) + (m_3 + m_4) - a\,\{(x_1 + x_2) + (X_3 + X_4)\} - b\,\{(Y_1 + Y_2) + (y_3 + y_4)\}}{4}$$

Y de las ecuaciones del grupo B se obtendrá los valores de *d*, *e* y f por estas otras expresiones.

$$d = \frac{(n_2 - n_1)\,(y_4 - y_3) - (Y_2 - Y_1)\,(n_4 - n_3)}{(x_2 - x_1)\,(y_4 - y_3) - (Y_2 - Y_1)\,(X_4 - X_3)}$$

$$e = \frac{(n_2 - n_1) + (n_4 - n_3) - d\,\{(x_2 - x_1) + (X_4 - X_3)\}}{(Y_2 - Y_1) + (y_4 - y_3)}$$

$$f = \frac{(n_1 + n_2) + (n_3 + n_4) - d\,\{(x_1 + x_2) + (X_3 + X_4)\} - e\,\{(Y_1 + Y_2) + (y_3 + y_4)\}}{4}$$

Por supuesto que es imposible que se encuentren estrellas que satisfagan rigurosamente las condiciones supuestas; y, por lo que atañe a la solución, basta que en una de las ecuaciones el coeficiente de *a* sea pequeño con relación al de b y que suceda lo contrario con la otra.

Pero, si se desea más exactitud en los valores de las constantes a, b, podemos seguir el método que se emplea en el Observatorio de Greenwich y procederemos así: se toman las estrellas con posiciones conocidas de la mitad Este de la placa y se sacan los promedios $x_e$ $y_e$ de sus x y de sus y, y estos promedios se consideran como las coordenadas de una estrella, cuya $\xi$ y $\eta$ serán también, en virtud de la forma lineal de las ecuaciones, los promedios de las $\xi$ y $\eta$ de las estrellas del Este de la placa. Procediendo de igual manera con las estrellas de O, N y S, tenemos cuatro ecuaciones que, si las estrellas están repartidas con cierta uniformidad, se acercarán lo bastante a los que nos darían las estrellas colocadas como lo indica nuestro esquema, sólo que aquellas tendrán mayor peso que las últimas. En efecto, el error medio de las cantidades que hemos designado por *m* y *n* no sería $\epsilon$, sino $\frac{\epsilon}{\sqrt{N}}$, siendo N el número de estrellas en la mitad de la placa considerada.

El procedimiento expuesto, además de que nos permite estimar debidamente la precisión de los resultados, nos evita los laboriosos cálculos a que da origen la aplicación de los *cuadrados mínimos*.

***

Conocidas las constantes de la placa, se calculan las coordenadas $\xi$, $\eta$ de las estrellas de la placa, por medio de las fórmulas del grupo (2), y de éstas se dedu-

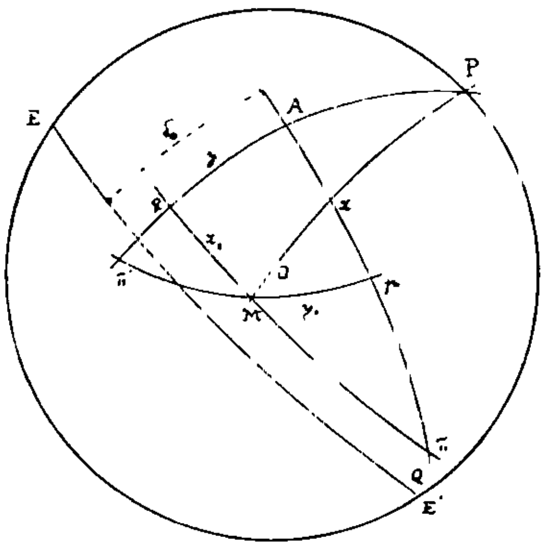


Fig. 3

cen sus coordenadas ecuatoriales por las fórmulas que vamos a determinar en seguida:

Sea O el centro de una esfera celeste (Fig. 3), en la cual fijaremos: 1.º el polo boreal P; 2.º la traza A del eje óptico prolongado hacia la región de observación; 3.º la posición M de una estrella.

Poniéndonos en el caso de que la placa fotográfica sea perpendicular al eje óptico, ella tendrá que ser paralela al plano tangente a la esfera en A, y debemos, por tanto, considerar a las coordenadas celestes del punto A como si fueran las del centro de la placa.

Tracemos el círculo horario PA y el círculo máximo AQ que le es perpendicular; esos dos círculos máximos, de los cuales uno tiene por polo a $\pi$ y el otro a $\pi'$, determinan un sistema rectangular de ejes de *coordenadas curvilíneas* (x, y).

Ahora, hagamos

$$
\begin{array}{lll}
A\,p = x & A\,q = y & PM = 90^{\circ} - \delta \\
M\,p - y_1 & M\,q = x_1 & Pq = 90^{\circ} \quad \delta_0 - y
\end{array}
$$

$$\sphericalangle\, MPq = \alpha - \alpha_1$$

y consideremos las x como positivas hacia el Este, las y como positivas hacia el Norte.

La ascensión recta y la declinación $\alpha$ y $\delta$ de la estrella M se pueden entonces expresar fácilmente en función de los arcos $x_1$, y y de las coordenadas ecuatoriales $\alpha_0$ y $\delta_0$ del centro de la placa.

En efecto, aplicándole al triángulo esférico rectángulo PMq las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica, obtendremos inmediatamente.

Con la 5.ª fórmula de los triángulos esféricos rectángulos.

$$\cos PM = \cos Pq \cos Mq$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\cos (90^{\circ} - \delta) &= \cos (90^{\circ} - \delta_0 - y) \cos x_1 \\
\operatorname{sen} \delta &= \operatorname{sen} (\delta_0 + y) \cos x_1
\end{aligned}
$$

Con la 2.ª fórmula de los mismos triángulos

$$\operatorname{sen} Mq = \operatorname{sen} PM \operatorname{sen} P$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} x_1 &= \operatorname{sen} (90^{\circ} - \delta) \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0) \\
\operatorname{sen} x_1 &= \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0)
\end{aligned}
$$

Y con la 4.ª fórmula de los mismos triángulos.

$$\cos P = \tan Pq \cot PM$$

de donde

$$\cos(a - a_0) = \tan(90^\circ - \delta_0 - y) \cot(90^\circ - \delta)$$
$$\cos(a - a_0) = \cot(\delta_0 + y) \tan \delta$$
$$\frac{\cos(a - a_0)}{\tan \delta} = \cot(\delta_0 + y)$$
$$\cos(a - a_0) \cot \delta = \frac{\cos(\delta_0 + y)}{\operatorname{sen}(\delta_0 + y)}$$

$$\frac{\cos(a - a_0)\cos\delta}{\operatorname{sen}\delta} = \frac{\cos(\delta_0 + y)}{\operatorname{sen}(\delta_0 + y)}$$

$$\frac{\cos(a - a_0)\cos\delta}{\operatorname{sen}(\delta_0 + y)\cos x_1} = \frac{\cos(\delta_0 + y)}{\operatorname{sen}(\delta_0 + y)}$$

$$\cos(a - a_0)\cos\delta = \cos(\delta_0 + y)\cos x_1$$

En resúmen, se obtiene el siguiente grupo de fórmulas:

$$(C) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{r} \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(\delta_0 + y)\cos x_1 \\ \cos\delta \operatorname{sen}(a - a_0) = \operatorname{sen} x_1 \\ \cos\delta\cos(a - a_0) = \cos(\delta_0 + y)\cos x_1 \end{array} \right.$$

Ahora bien, como los arcos de círculos máximos AQ y AP son rectangulares, cada uno de esos círculos pasará por los polos del otro. Por consiguiente, en los triángulos esféricos rectángulos M $\pi'$ q, M $\pi$ p, los ángulos en $\pi'$ y en $\pi$ tendrán respectivamente por medida los arcos x e y. Luego, tomando en cuenta esto y aplicándole al triángulo M $\pi'$ q las mismas fórmulas de los triángulos esféricos rectángulos, se obtendrán las relaciones siguientes:

$$(D) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} y_1 = \cos x_1 \operatorname{sen} y \\ \cos y_1 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_1 \\ \cos y_1 \cos x = \cos x_1 \cos y \end{array} \right.$$

Y dividiendo la 2.ª por la 3.ª y la 1.ª por la 3.ª de estas fórmulas del grupo D obtenemos inmediatamente:

$$(E) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \tan x_1 = \tan x \cos y = \xi \cos y \text{ por que } \xi = \tan x \\ \tan y_1 = \tan y \cos x = \eta \cos x \quad \text{»} \quad \eta = \tan y \end{array} \right.$$

*(Continuará)*