
ANALES
DEL
INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

**Determinación y relaciones recíprocas de las líneas de influencia
en las vigas, según los métodos de Roberto Land**

(Trabajo hecho en la Sección Obras Nuevas de los FF. CC. del E.—Chile)

JUAN VILLALOBOS R.

(Ingeniero Civil)

Las investigaciones siguientes se refieren a las líneas de influencia para cargas verticales.

Trataremos primeramente las vigas simples y en seguida las continuas de alma llena y enrejadas con reacciones verticales (Cap. I a VI) y en que las cargas se transmiten a las vigas concentradas en ciertos puntos (los trasversales) que llamaremos simplemente nudos.

Estas investigaciones tienen por objeto, la deducción de las relaciones recíprocas entre las diferentes líneas de influencia; relaciones cuyo conocimiento facilitará en mucho la construcción de dichas líneas.

A.—VIGAS SIMPLES Y VIGAS CONTINUAS

§ I.—Relación entre las líneas de influencia de los momentos M_{r-1} y M_r para dos nudos consecutivos $(r-1)$ y (r) y la línea de influencia de los esfuerzos de corte V_r para el paño λ_r comprendido entre esos dos nudos.

Sea λ_r la luz del paño comprendido entre los dos nudos $(r-1)$ y (r) y V_r el esfuerzo de corte en un punto del paño y distante de una cantidad Z del punto $(r-1)$. Imaginemos una carga en el paño, que se transmita a los nudos, se tendrán las relaciones generales siguientes: (Fig. 1)

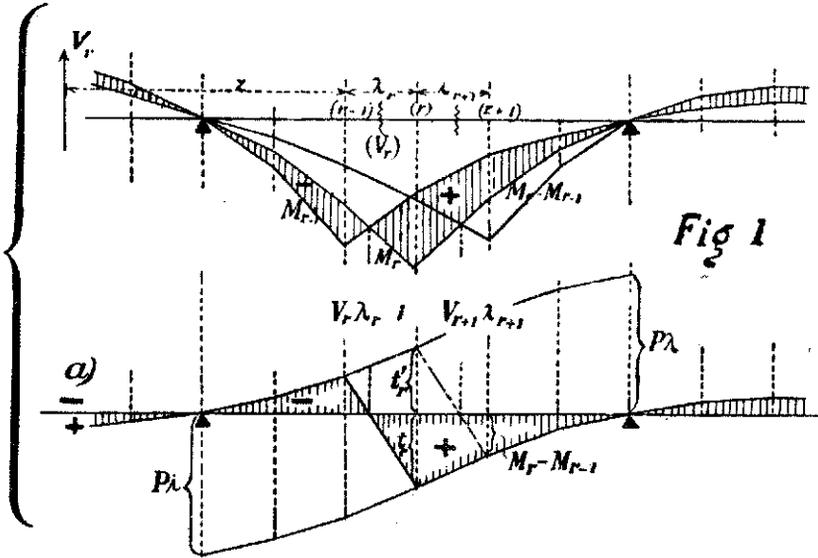
$$M_{r-1} = V_r Z$$

$$M_r = V_r (Z + \lambda_r) \text{ de donde}$$

$$1) \quad M_r - M_{r-1} = V_r \lambda_r \quad \text{o sea}$$

$$V_r = \frac{1}{\lambda_r} (M_r - M_{r-1})^*$$

Pero en el caso de una carga aislada, M_r y M_{r-1} quedan determinados por



la ordenada de la línea de influencia correspondiente, medida a plomo de la carga y podemos decir:

1) La diferencia de las áreas de influencia para M_r y M_{r-1} (parte achurada fig. 1) representa el área de influencia para los V_r aumentada λ_r veces

Si se han construido las líneas de influencia de los momentos para los nudos consecutivos no será, pues, necesario determinar especialmente las áreas de influencia para los esfuerzos de corte V , porque la diferencia entre dos áreas de influencia de momentos consecutivos dará inmediatamente el área de influencia para los valores $V \cdot \lambda$.—

En la (fig. 1a) se ha referido el área de influencia para los $V_r \lambda_r$ (achurada) a una línea recta.

* Relación que está de acuerdo con la ecuación conocida: $V = \frac{dM}{dx}$

§ II.—Relación entre las líneas de influencia de momentos para tres nudos consecutivos ($r - 1$); r y ($r + 1$)

Se supone cualquier distribución de las cargas y en tal forma que entre los nudos ($r - 1$) y ($r + 1$) no existan ninguna de ellas. Tendremos las relaciones

$$\left. \begin{aligned} M_{r-1} &= V_r Z \\ M_r &= V_r (Z + \lambda_r) \\ M_{r+1} &= V_r (Z + \lambda_r + \lambda_{r+1}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_r - M_{r-1} &= V_r \lambda_r \\ M_{r+1} - M_r &= V_r \lambda_{r+1} \end{aligned}$$

de aquí tendremos

$$2) \quad \frac{M_r - M_{r-1}}{M_{r+1} - M_r} = \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} \quad *$$

Para una carga aislada podremos decir entonces:

2) *La razón entre las diferencias de las ordenadas correspondientes a dos, de tres, líneas de influencia consecutivas, es constante en todo el trayecto de ellas, excepto en la parte correspondiente a los paños λ_r y λ_{r+1} . Esta razón es igual a*

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}$$

Algunas consecuencias

a) La fórmula 2) se puede poner bajo la forma

$$\frac{1}{\lambda_r} (M_r - M_{r-1}) = \frac{1}{\lambda_{r+1}} (M_{r+1} - M_r)$$

y según 1) tendremos que

$$V_r = V_{r+1}$$

hay que tener presente que hemos supuesto que no existan cargas entre los límites ($r - 1$) y ($r + 1$).

* Esta relación sencilla puede deducirse también directamente de un funicular de las cargas, el que será una recta entre $r - 1$ y $r + 1$ por el hecho de no existir cargas entre estos límites.

Para una carga aislada se obtiene entonces la relación 3), que también resulta directamente considerando el significado de V_r y V_{r+1} .

3) *Las líneas de influencia para V_r y V_{r+1} coinciden, en general, en todo su rayecto separándose sólo dentro de los paños λ_r y λ_{r+1} .*

Si como sucede generalmente $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ (caso de fig. 1) entonces la relación enunciada vale también para las líneas de influencia de los productos $V_r \cdot \lambda_r$ y $V_{r+1} \cdot \lambda_{r+1}$, como lo indica la fig. 1a). Aquí la recta inclinada, de puntos, del paño λ_{r+1} corresponde a los productos $V_{r+1} \cdot \lambda_{r+1}$.

Tomemos una carga aislada P a plomo del nudo (r), tenemos que:

$$V_r - V_{r+1} = P$$

y si los paños son iguales y de longitud λ

$$V_r \lambda - V_{r+1} \lambda = P \lambda$$

Por esto, llamando t_r y t'_r respectivamente las ordenadas de las líneas de influencia para $V_r \lambda$ y $V_{r+1} \lambda$, a plomo de (r) es válida la relación:

$$3) \quad t_r + t'_r = P \lambda = Cte$$

según esto se tiene:

3a) *Los vértices de todas las líneas de influencia para $V \lambda$, entre dos apoyos vecinos, están sobre dos líneas cuya distancia medida verticalmente ($t + t'$) es constante e igual a $P \lambda$. Aquellas dos líneas son las líneas de influencia para los paños contiguos a los apoyos.*

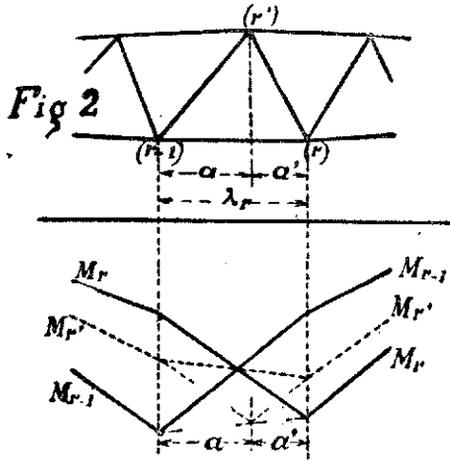
Según esto, dada la línea de influencia $V \lambda$ para un paño, sea la $V_1 \lambda$, se pueden deducir de ella todas las líneas $V \lambda$ para los paños restantes.

b) Aplicando la ecuación 2) a tres nudos contiguos de un sistema enrejado (fig. 2) tales como ($r-1$) y (r), que son dos nudos consecutivos que reciben las cargas, y el nudo (r') de la cabeza no cargada, tendremos:

$$\frac{M_{r'} - M_{r-1}}{M_r - M_{r'}} = \frac{a}{a'}$$

* Para una carga en (r) se tendría: $V_{r+1} \lambda = -t'_r$

Aplicamos esta relación a las líneas de influencia para los casos en que la carga aislada se encuentre precisamente en el punto $(r - 1)$ y en (r) respectivamente; se deduce que la parte recta de la línea de influencia, para M_r , comprendida entre los puntos $(r - 1)$ y (r) pasa por el punto de intersección de las líneas de influencia para M_{r-1} y M_r . Esto se comprende por el hecho de que una carga



situada a plomo de dicho punto debe producir momentos iguales en $(r - 1)$ y (r) o sea

$$M_{r-1} = M_r$$

La representación gráfica de estos últimos, en una área de momentos, dará entre esos límites una recta paralela a la línea de referencia o de cierre del funicular de los momentos y por esto tenemos:

$$M_{r'} = M_{r-1} = M_r$$

c) Como casi en todos los puentes, las luces λ son iguales para toda la viga, resulta de la fórmula 2) con las mismas hipótesis de carga:

$$M_{r+1} - M_r = M_r - M_{r-1} = t$$

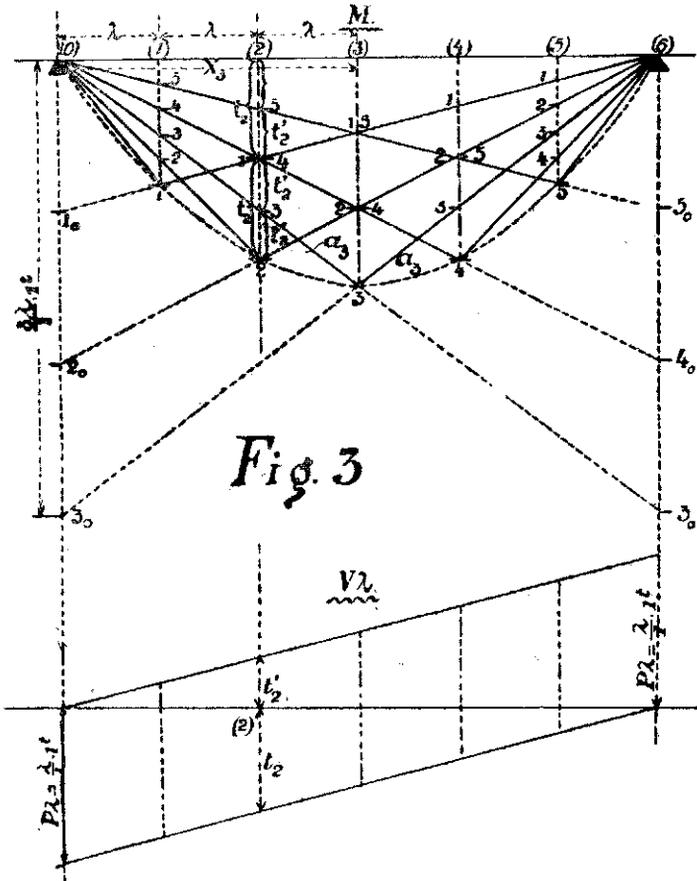
Tomemos ahora una carga aislada y fija actuando en el nudo (m) , y un nudo (r) móvil (variable) situado una vez a la izquierda y otra vez a la derecha de (m) . Si se consideran sucesivamente las líneas de influencia de los M para aquel nudo (r) , se deduce la siguiente propiedad tan importante, para determinar gráficamente las líneas de influencia para los distintos nudos:

4) Las líneas de influencia de los M correspondientes a los puntos (r) situados, ya a la izquierda, ya a la derecha de un nudo (m), interceptan sobre la vertical que pasa por ese nudo (m) trozos respectivamente iguales a t y a t' . (Véanse las figuras 3, 4 y 5 que se refieren al caso del nudo $m = 2$).

§ III.—Aplicación de las relaciones deducidas a vigas simples y continuas

a) VIGAS SIMPLES

En la figura 3 se han dibujado las líneas de influencia para los momentos de flexión de una viga libremente apoyada con seis panos iguales y para los nudos



0, 1, 2 6 y en ella se pueden comprobar fácilmente las relaciones antes deducidas.

La línea de influencia para un nudo por ejemplo: M_3 , es un triángulo cuyo vértice queda a plomo del nudo (3) y cuyos lados a_3 y b_3 interceptan sobre las verticales que pasan por los apoyos (0) y (6) un segmento:

$$\overline{(0) 3_c} = \frac{x_3}{1} \cdot 1t = \frac{3 \lambda}{1} \cdot 1t$$

En la figura 3 se adoptó:

$$\frac{1t}{1m} = \frac{\text{Unidad de fuerza}}{\text{Unidad de longitud}} = 1,5$$

por lo cual resultó:

$$\overline{(0) 3_0} = 1,5 x_3$$

b) TRAMO INTERMEDIO DE UNA VIGA CONTINUA

En la figura 4 se han dibujado las líneas de influencia para un tramo intermedio de una viga continua.

Supongamos que la luz entre dos apoyos vecinos se haya dividido en s paños iguales λ (en las Figs. 4 y 5 tenemos $s = 6$).

Designemos abreviadamente por E_k^M la línea de influencia del momento en el nudo (k) y por E_o^M y E_s^M las líneas de influencia de momento correspondientes a los apoyos de un tramo.

De acuerdo con el teorema 1, la diferencia de dos áreas de influencia consecutivas E_{r-1}^M y E_r^M representa el área de influencia de $V_r \lambda_r$ (designada por $E_r^{V \cdot \lambda}$).

Esta área $V_r \lambda_r$, dibujada para el paño λ_3 , está sombreada con achurado vertical en las figuras 4 y 4a (véase también la Fig. 1).

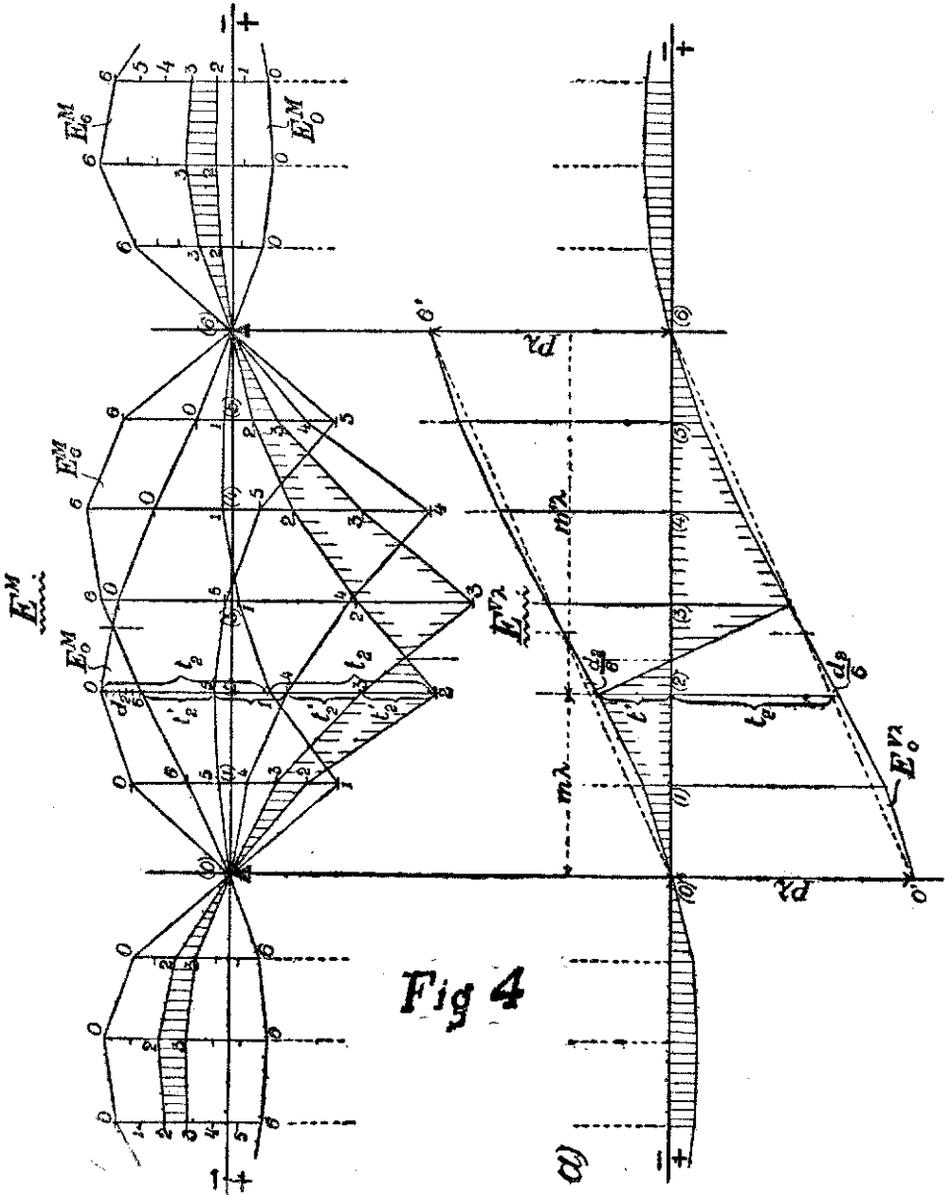
Considerando lo expresado más arriba y los teoremas 3a y 4 se obtiene la sencilla relación:

5) En un nudo cualquiera (m) la ordenada correspondiente $\left\{ \begin{matrix} t_m \\ t'_m \end{matrix} \right\}$ de la línea $E^{V \cdot \lambda}$ es igual al segmento interceptado sobre la ordenada que pasa por (m) por las líneas de influencia $\left\{ \begin{matrix} E_o^M \text{ hasta } E_m^M \\ E_m^M \text{ hasta } E_s^M \end{matrix} \right\}$, siendo siempre $t_m + t'_m = P \cdot \lambda$

(fórmula 3).

[Los segmentos t y t' de la Fig. 3, pueden tomarse también de la línea de influencia para V λ dibujada debajo, como puede verse en el nudo (m) = (2)]

Con esta importante relación se pueden resolver fácilmente los siguientes problemas:



Problema 1

Se dan dos líneas de influencia cualesquiera correspondientes a dos nudos

vecinos, sean por ejemplo: E_2^M y E_3^M , se pide encontrar las líneas de influencia para los demás nudos del tramo.

Las diferencias entre las ordenadas de las dos líneas de influencia dan inmediatamente las ordenadas para la línea $E_3^{V\lambda}$ en la siguiente forma: a la izquierda del nudo (3) los segmentos t' , en (3) y a la derecha de (3) los segmentos t .

Los segmentos restantes se determinan por la relación $t_m + t'_m = P \cdot \lambda$, con lo cual quedan determinadas todas las líneas de influencia del tramo, incluso las líneas $E^{V\lambda}$ para los demás paños.

Problema 2

Se dan E_0^M y $E_0^{V\lambda}$ [= para una sección infinitamente próxima a la derecha de (0)]. Fig. 4. Se pide determinar las demás líneas de influencia.

Primeramente se determinan los complementos t' de los trazos t dados (ordenadas de $E_0^{V\lambda}$), con lo cual quedan definidas las demás líneas de influencia $E^{V\lambda}$ y E^M , incluso E_s^M .

Para obtener las líneas E^M se deduce, pues el sencillo método que va a continuación:

Se aplica sobre la vertical de un nudo (m) (véase $m = 2$) el trazo t_m desde E_0^M m veces hacia abajo y desde el punto final m así obtenido se aplica el trazo t'_m $m' = (s - m)$ veces hacia arriba.

En los primeros puntos de división se obtienen las intersecciones con la vertical de (m) de las líneas E_1^M hasta E_m^M y en los últimos, las intersecciones con la vertical de (m) de las líneas E_{m+1}^M hasta E_s^M .

Problema 3

Se dan las líneas de influencia para los momentos de apoyo E_0^M y E_s^M ; se pide determinar las demás líneas de influencia.

Designemos la diferencia entre las ordenadas de E_0^M y E_s^M en el nudo (m) por $d_m = M_0^m - M_s^m$ (debiendo tomarse los valores absolutos de estas ordenadas M_0^m y M_s^m).

Según la Fig. 4 (véase nudo (m) = 2) y la relación 5 y designando $s - m$ por m' se obtiene para la vertical que pasa por el nudo (m):

$$mt_m = (s - m) t'_m + d_m = (s - m) (P \lambda - t_m) + d_m$$

de donde:

$$st_m = (s - m) P \lambda + d_m = m' (P \lambda) + d_m$$

$$4. \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} t_m = \frac{m'}{s} (P \lambda) + \frac{d_m}{s} \\ t'_m = (P \lambda) - t_m = \frac{m}{s} (P \lambda) - \frac{d_m}{s} \end{array} \right.$$

Según estas fórmulas es fácil determinar gráficamente los trazos t_m y t'_m partiendo de d_m , como explicaremos eu seguida:

En la Fig 4a dibújese $(0) O' = (6) 6' = P \lambda$ y trácense $O'(6)$ y $(0)6'$. Los segmentos interceptados por estas paralelas sobre la vertical de un nudo $(m)=(2)$ por ejemplo; tienen los siguientes valores:

$$\frac{m}{s} (P \lambda) = \frac{2}{6} P \lambda \text{ para el trazo que queda sobre el eje de referencia y}$$

$$\frac{m'}{s} (P \lambda) = \frac{4}{6} P \lambda \text{ para el trazo inferior}$$

$$\text{Aplicando ahora } \frac{d_m}{s} = \frac{d_2}{2} \text{ desde los extremos de estos dos trazos y}$$

en el sentido de 06 (considerando la diferencia 06 de los momentos de apoyo como trazo dirigido) se obtienen inmediatamente las ordenadas t'_2 y t_2 y por consiguiente también dos puntos de las líneas $EV \lambda$.

Según lo dicho anteriormente, una vez obtenidas las líneas $EV \lambda$ quedan determinadas las demás líneas EM .

En el caso que obre una fuerza fuera del tramo I_n considerado se obtiene para $V \lambda$, según la figura, la relación:

$$V \cdot \lambda_n = \frac{1}{s_n} (M_s - M_o) *$$

* λ_n y s_n se refieren en este caso al tramo I_n con las líneas de influencia consideradas. Véanse también las primeras ecuaciones del capítulo II.

De aquí se deduce:

$$5) \dots\dots\dots V = \frac{1}{s_n \lambda_n} (M_s - M_0) = \frac{1}{I_n} (M_s - M_0)$$

Como las ordenadas de $E^V \lambda$ en los tramos vecinos al considerado I_n son generalmente muy pequeñas conviene más calcular la influencia sobre los valores V , de cargas situadas fuera del tramo I_n , colocando en la ecuación anterior los mayores valores de las ordenadas de E_s^M y E_0^M .

c) TRAMO FINAL DE UNA VIGA CONTIGUA

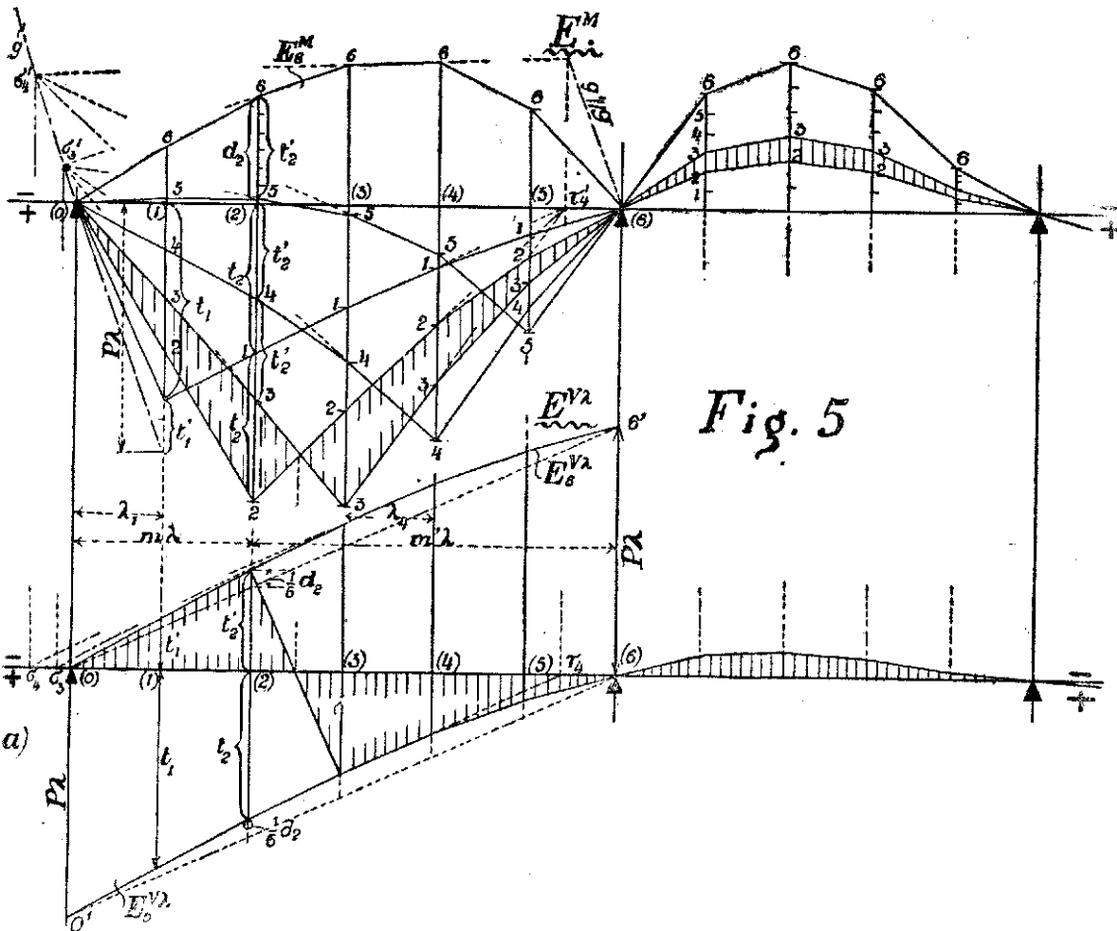


Fig. 5

Si el tramo considerado de la viga es un tramo final y el apoyo izquierdo (0) es el apoyo en el estribo, la línea E_0^M coincidirá con el eje de referencia (eje de las abscisas) y se obtiene el caso representado en las Figs. 5 y 5a, para el cual subsisten todas las relaciones mencionadas anteriormente.

Ahora bien, si se toma $d_m = M_s^m - M_o^m$ se debe cambiar el signo de d_m en las fórmulas 4). Así resulta:

$$4a) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} t_m = \frac{m'}{s} (P \lambda) - \frac{d_m}{s} \\ t'_m = \frac{m}{s} (P \lambda) + \frac{d_m}{s} \end{array} \right.$$

Por medio de estas fórmulas se han determinado gráficamente en la Fig. 5a) los trazos t_2 y t'_2 partiendo del valor d_2 .

De las relaciones entre las figuras 5 y 5a) se deducen, además, las siguientes propiedades que pueden aprovecharse para comprobar la exactitud del dibujo:

Las ordenadas entre la línea $E_s^M = E_6^M$ y el eje de referencia (0)6 son s veces (6 veces) más grandes que las ordenadas entre $E_6^{Y\lambda}$ y la recta (0)6'.

Si hacemos rotar la recta (0)6 alrededor del punto (0) hasta la posición (0) (6) (eje de referencia) y se quiere conservar la misma razón entre ordenadas ya mencionada, debe hacerse rotar el eje (0) (6) de E^M alrededor del punto (0) hasta una posición g , tal, que la recta g intercepte sobre la vertical del nudo (1) una ordenada igual a $P \lambda$.

Como $P \lambda = t_1 + t'_1$ y t_1 se mide desde el eje de referencia (fig. 5 de arriba), se deduce, además, que las rectas g y (0)1 del primer paño λ_1 interceptan sobre la vertical del nudo (1) un segmento igual a t'_1 .

Además se deduce fácilmente que el punto σ_m , intersección de la prolongación de un lado de $E_6^{Y\lambda}$ perteneciente al paño λ_m con el eje de referencia, está situado en la vertical del punto σ'_m intersección del lado correspondiente de la línea E_6^M con la recta g .

[En la Fig. 5a se han determinado los puntos σ_3 y σ_4].

Además las partes de las líneas E^M que partiendo de (0) descienden hasta los vértices inferiores m e interceptan los segmentos t' son afines entre sí y el eje de afinidad es g . *

Para las partes de las líneas E^M que desde los vértices inferiores ascienden hacia la derecha y que interceptan los trazos t , el eje de afinidad coincide con el eje de referencia (0)(6). Los elementos de un paño λ_m (por ej. λ_1) de las líneas E^M cortan al eje mencionado en un punto τ'_m .

* Cuando se tienen varias figuras cuyos lados análogos convergen a un punto y los distintos puntos de convergencia se encuentran sobre una recta, se dice entonces que las figuras son afines. La recta que contiene los centros de convergencia se llama eje de afinidad de las figuras afines.

Este punto τ'_m , el punto τ_m , intersección del elemento correspondiente de la línea $E_0^{V\lambda}$ con el eje (0)(6) y el punto de intersección del elemento correspondiente situado en el paño λ_m de la línea E_6^M con una recta g' , paralela a g y trazada por (6), se encuentran sobre una misma vertical. (En la fig. 5 se tiene el caso para $\lambda_m = \lambda_4$).

Aquí haremos notar que la línea $E_0^{V\lambda}$ no es más que la línea de influencia de la reacción del apoyo extremo (0), cuyas ordenadas están amplificadas por λ , puesto que el esfuerzo de corte V_0 en una sección infinitamente próxima a la derecha de (0), es siempre igual a la reacción de apoyo en (0).

§ IV.—Determinación de los puntos fijos, de las líneas de influencia de los momentos en los apoyos y de las reacciones de apoyo en vigas contiguas.

La determinación más sencilla de dichas líneas se obtiene aprovechando la posición de los puntos fijos, tanto en el caso de una viga con momento de inercia constante, como en el caso que éste sea variable.

Llamamos puntos fijos de un tramo los puntos de inflexión de la elástica del tramo en el caso que sobre el tramo no obre ninguna fuerza exterior.

a) DETERMINACION GRÁFICA DE LOS PUNTOS FIJOS EN UNA VIGA DE SECCION VARIABLE

No trataremos la solución de este problema para el caso de una viga de sección constante porque aparece en todos los libros sobre vigas contiguas (Müller Breslau, Ritter, Cart y Portes, etc.).

El procedimiento general que damos aquí es aplicable tanto a una viga de alma llena como a una viga enrejada, de sección variable.

Explicaremos el método por medio de un ejemplo, resolviendo el problema para una viga contigua sobre cuatro apoyos (0), (1), (2), (3), de tres tramos I_1 , I_2 , I_3 (fig. 6).

Además daremos por sabida la determinación de la elástica para vigas de alma llena y enrejadas.

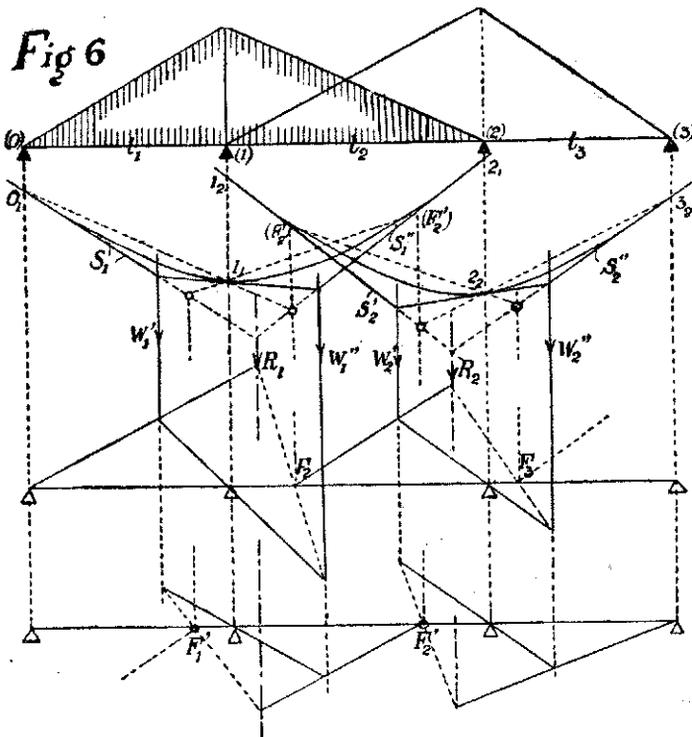
Supongamos como superficie de momentos sobre los dos primeros tramos I_1 y I_2 un triángulo cualquiera cuyo vértice quede sobre el apoyo intermedio (1). Dibujemos en seguida, siguiendo el procedimiento de Mohr, la elástica correspondiente a esa superficie de momentos, como polígono o curva funicular de ciertas fuerzas ω , dependientes del área de momentos y del trabajo interno de deformación.

Sean W'_1 y W''_1 las resultantes de las fuerzas ω correspondiente a los tra-

mos I_1 y I_2 , respectivamente y sea R_1 la resultante de los ω de ambos tramos ($R_1 = W'_1 + W''_1$).

La posición de cada una de estas tres resultantes se encuentra sencillamente por intersección de los lados extremos del funicular correspondiente o por las tangentes en los puntos extremos en caso de considerar la curva.

Exactamente lo mismo se hace con los tramos I_2 y I_3 , considerando a (2) como apoyo intermedio y se encuentran las fuerzas W'_2 , W''_2 y R_2 y así se sigue hasta llegar al otro extremo de la viga.



Aplicuese ahora el método conocido tomando en lugar de las «verticales del tercio de la luz» las líneas de acción de las fuerzas W y en lugar de las «verticales trasladadas de apoyo» las líneas de acción de las resultantes R y se obtendrán inmediatamente los puntos fijos izquierdos F y los derechos F' .

Con mayor sencillez aún y sin recurrir al método ya mencionado se encuentran los puntos fijos de la siguiente manera:

Sean 0_1 , 1_1 , 2_1 los puntos del primer funicular que se encuentran a plomo de los apoyos (0), (1), (2) cuyos lados extremos designaremos por S'_1 y S''_1 .

Sean 1_2 , 2_2 , 3_2 , S'_2 , S''_2 los mismos puntos y rectas correspondientes del segundo funicular. Etc.

Entonces la intersección de la recta $O_1 I_1$ con S'_1 está situada sobre la vertical de F_2 .

Si (F_2) es la intersección de la misma vertical con S'_2 , la recta $(F_2) I_2$ corta a la recta S''_2 en un punto que queda sobre la vertical de F_3 ; etc.

De la misma manera se procede empezando desde el apoyo extremo derecho y se obtendrán así los puntos fijos derechos F' .

Se trazará la recta $I_2 I_3$, su intersección con S'_2 fija los puntos F'_2 y (F'_2) .

Después se trazará la recta $(F'_2) I_1$ cuya intersección con S'_1 define el punto F'_1 como se indica en la figura.

La demostración de este segundo método se reduce a un sencillo problema de geometría plana, como puede verse si se compara la nueva construcción con la ya dibujada debajo.

OBSERVACIÓN

Como los lados extremos de las elásticas en forma de funiculares de cada dos tramos vecinos, no representan otra cosa que las prolongaciones hacia atrás de las elásticas de los tramos adyacentes, imaginados rígidos y sin carga, se deduce que para las vigas enrejadas deben tomarse en cuenta también las fuerzas ω que obran en los nudos de apoyo.

Solamente para el primer y último apoyo es indiferente tomar o nó en cuenta las fuerzas ω que allí actúan, porque la posición de los puntos fijos es independiente de ellas. Uno puede convencerse fácilmente de lo afirmado, haciendo un dibujo a mano alzada de las elásticas.

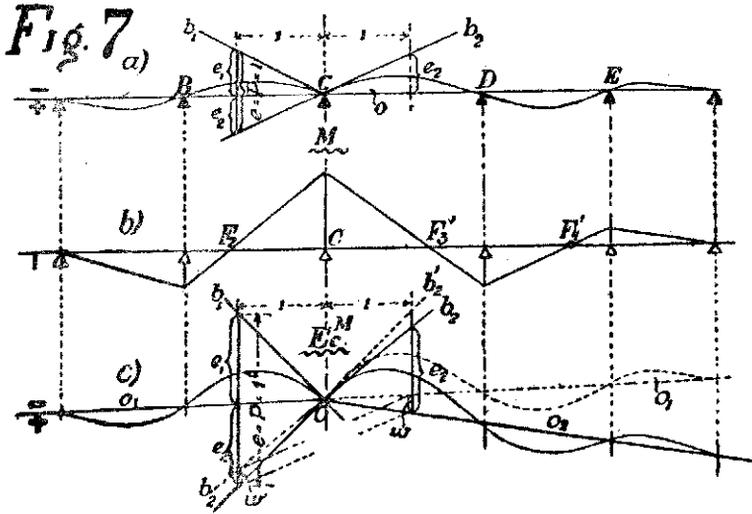
La fuerza ω que obra sobre el nudo del apoyo intermedio de dos tramos vecinos, (por ej.: la fuerza ω que obra en el punto I_1 de la primera elástica) puede contarse (en caso de enrejado) como perteneciente al tramo izquierdo o al derecho, indiferentemente, para determinar las resultantes parciales W' y W'' . En ambos casos se llega a la misma posición de los puntos fijos, como puede verificarse también con auxilio de un esquema.

b) LÍNEA DE INFLUENCIA DE UN MOMENTO DE APOYO

De las relaciones generales entre las líneas elásticas y las líneas de influencia, deducidas del teorema de Maxwell, resulta que la línea de influencia de los momentos en un punto A de una viga puede interpretarse como la elástica que se obtiene imaginando intercalada en el punto A de la viga una articulación y aplicando en el extremo A del trozo de la izquierda un momento igual y de signo contrario al que se aplica en el extremo A del trozo de la derecha. El valor de este momento debe ser tal que el ángulo de la rotación relativa de las dos seccio-

nes en A sea de la magnitud $P = 1$ (es decir: igual a la magnitud representativa de la carga móvil $P = 1^t$).

El ángulo de la rotación relativa queda definido gráficamente por la distancia entre las tangentes trazadas a las dos elásticas en el punto de articulación hipotético y medida sobre la ordenada trazada a la distancia l del punto de rotación.



Aplicación de lo anterior a la línea de influencia del momento M_c , correspondiente al apoyo C de la viga continua con 5 tramos desiguales, representada en la Fig. 7:

Imaginemos intercalada en el punto C de la viga una articulación y supongamos que, sin variar las condiciones de apoyo, han girado las secciones C en sentido contrario por la aplicación en C de momentos iguales y de signo contrario.

Bajo estas condiciones se obtiene la elástica dibujada en la figura 7a), que puede considerarse como la línea de influencia E_c^M .

La ordenada e , entre las tangentes b_1 y b_2 trazadas en el punto C, medida a la distancia horizontal l m de C es la representación gráfica de la carga unitaria móvil $P = 1^t$ y al mismo tiempo es la unidad de medida ($= 1^{tm}$) para las ordenadas de la línea de influencia.

Si llamamos e_1 y e_2 las ordenadas que quedan entre b_1, b_2 y el eje de referencia 0 , medidas a la distancia l de C, a la izquierda y a la derecha, respectivamente, tendremos:

$$e = e_1 + e_2 = 1^{tm}$$

(Continuará).