Vigas en Arcadas

ERROR RELATIVO PROVENIENTE DEL CALCULO APROXIMADO CORRIENTE Y EL CALCULO PRECONIZADO POR VIERENDEEL EN UN CASO PRACTICO DE VIGAS EN ARCADAS CALCULADAS POR AMBOS SISTEMAS

POR

CARLOS PONCE DE LEÓN G.

En un puente de vigas en arcadas que he proyectado últimamente en la Inspección de Puentes de la Dirección de Obras Públicas para el Mapocho, en Santiago, he tenido oportunidad de apreciar el error relativo que resulta en el cálculo de vigas en arcadas de bridas no paralelas adoptando el cálculo aproximado que supone articulaciones en la mitad del largo de las barras y empotramiento en el origen de éstas y el cálculo de las mismas según la teoría de Vierendeel.

Voy a exponer en qué consisten ambas teorías.

TEORIA VIERENDEEL

Sea el caso de una viga cualquiera sometida a fuerzas exteriores.

Refirámosla a dos ejes de coordenadas rectangulares (Fig. 1)

Cortemos longitudinalmente la viga en dos trozos, de suerte que pasemos por todos los montantes. Para llevar a su equilibrio anterior los trozos superiores necesitamos aplicarles a cada uno de los montantes una fuerza vertical, una horizontal y un momento.

Sean estos valores los siguientes para un montante *n*.

Componente vertical	q_n
Componente horizontal	π_n
Momento	μ_n

FIG I

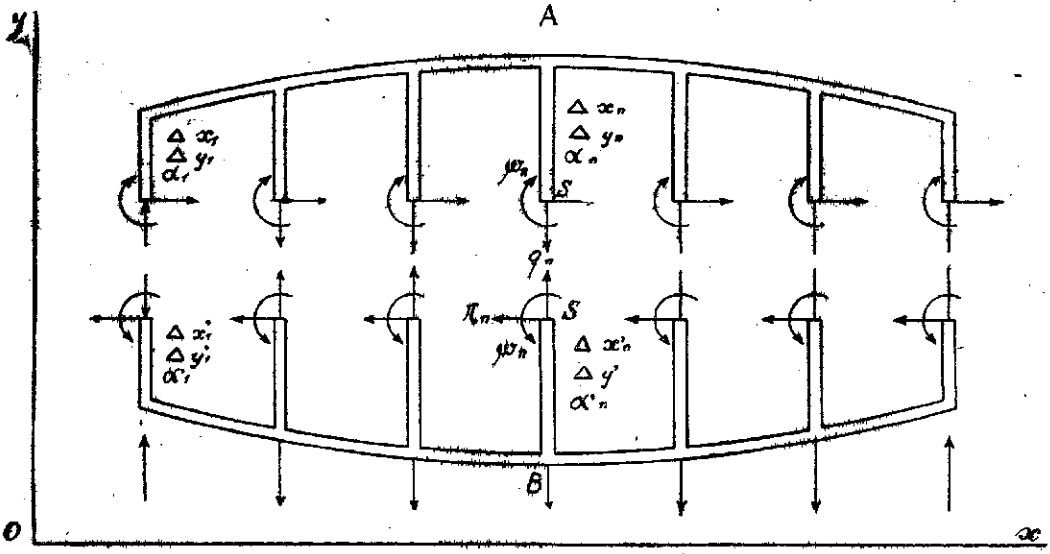
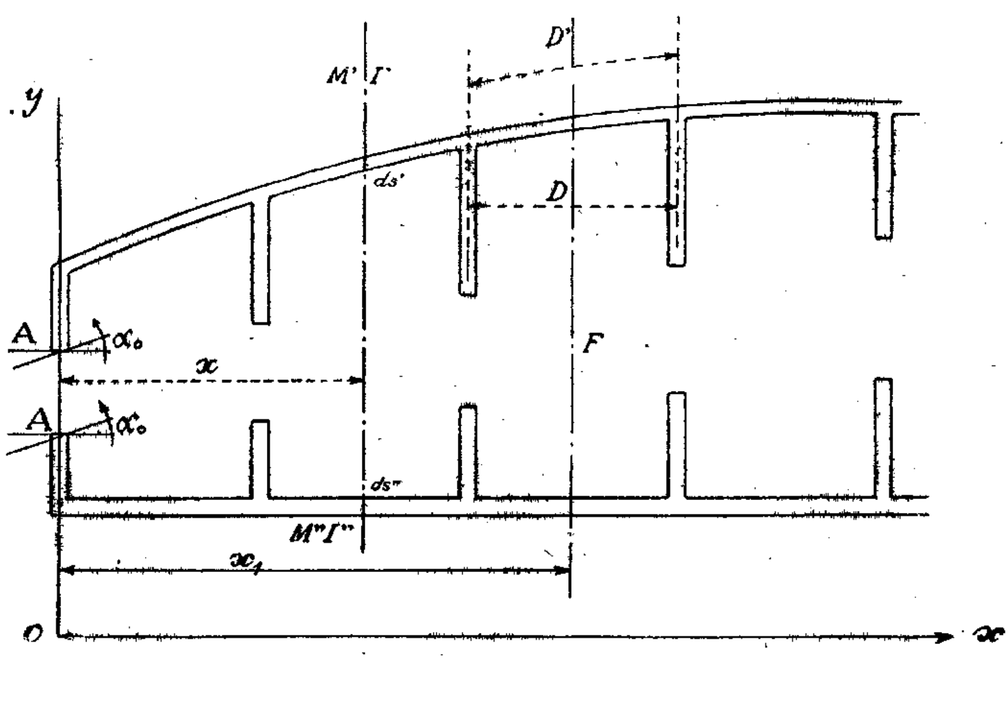


FIG II



Es decir 3 incógnitas para cada montante. Si N es el número de montantes se presentan 3N incógnitas en total.

Las ecuaciones que determinan esas incógnitas nos son dadas por los desplazamientos de una sección S de un montante. La expresión de los desplazamientos calculados en función de las dimensiones del trozo superior con sus respectivas fuerzas es igual a la expresión de los desplazamientos de la misma sección calculados en función de las dimensiones del trozo inferior y de las fuerzas que le son aplicables.

Sean Δx_n, Δy_n, α_n los desplazamientos de S considerados como del trozo superior y por $\Delta' x_n$, $\Delta' y_n$, α'_n los del trozo inferior.

Tendremos:

$$\Delta x_n = \Delta' x_n$$
$$\Delta y_n = \Delta' y_n$$
$$\alpha_n = \alpha'_n$$

Estas son, en esencia, las ecuaciones fundamentales de la teoría Vierendeel para el cálculo de vigas en arcadas.

En el desarrollo de su teoría, Vierendeel introduce diversas simplificaciones que anoto en seguida: (Véase "Memoires et Compte Rendu des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France". Bulletin d'Aout 1909).

a) Se desprecian las deformaciones por tracción, compresión y cisalle de los elementos de la viga. Esto equivale a considerar únicamente las deformaciones por flexión. Según esto, en los montantes las ordenadas de flexión de las cabezas superiores e inferiores son iguales. Esta conclusión es verídica cualquiera que sea la forma de las cabezas. La igualdad de las ordenadas de flexión se mantiene entre dos montantes contiguos.

b) Los momentos de inercia de las cabezas y de los montantes son iguales entre sí.

Tomemos una viga de cabezas no paralelas. Cortémosla en dos trozos por una sección que tome todos los montantes.

Llamemos (Fig. 2) $\Delta' y_1$ la ordenada de flexión en un punto de la cabeza superior a la distancia x_1 del origen, $\Delta'' y_1$ la ordenada de flexión en el punto correspondiente sobre la vertical de la cabeza inferior.

M' e *I'* el momento de flexión y el momento de inercia para la cabeza superior a la distancia *x* del origen. Su desarrollo en ese punto es *ds*. M'', I'', dx los valores correspondientes a la cabeza inferior a la misma distancia x.

Tenemos:

$$\Delta' y_1 = \alpha_o x_1, + \int_1^x (x_1 - x) \frac{M' \, ds}{E \, I''} + \Delta y_A$$

$$\Delta'' y_1 = \alpha_o x_1 + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M'' dx}{E \, I''} + \Delta y_A$$

y cualquiera que sea el valor de x tenemos:

$$\Delta y'_1 = \Delta'' y_1$$

resulta

$$\frac{M' \, ds}{E \, I'} = \frac{M'' \, dx}{E \, I''}$$

de donde

$$\frac{M'}{M''} = \frac{I' \, dx}{I'' \, ds} \qquad (1)$$

Esta simple relación nos da numéricamente la relación que liga los dos momentos de flexión secundarios *M'* y *M''* que actúan en cada cabeza a una misma distancia x del origen.

Esta relación (1) nos dice también que los M' y M'' son del mismo sentido.

En la aplicación que seguiremos admitiremos que las cabezas superiores son rectilíneas de un montante a otro.

Consideremos un paño cualquiera de la viga que nos ocupa (fig. 3). Sean dos secciones *A* y *B* a una distancia *dx* una de otra. En cada cabeza de la sección *A* tenemos las fuerzas y momentos signados en la figura. Asimismo en la sección B. Cada trozo de cabeza está en equilibrio, luego:

$$M' = \mu' + \theta' dx - N \, dy$$

$$M'' = \mu'' + \theta'' dx$$

y en virtud de la relación (1)

$$\mu' + \theta' \, dx - N dy = \frac{I'}{I''}\frac{dx}{ds}\left(\mu'' + \theta'' dx\right)$$

Ahora bien:

$$\mu' = \frac{I'}{I''}\frac{dx}{ds}\,\mu''$$

luego:

$$\theta' \, dx \quad N dy = \frac{I'}{I''}\frac{dx}{ds}\,\theta'' \, dx$$

$$\theta' - \frac{I'}{I''}\frac{dx}{ds}\,\theta'' = N\frac{dy}{dx}$$

designando por α la tangente del elemento infinitamente pequeño de la cabeza superior en el intervalo de A a B y por a el valor $\frac{I'}{I''}\frac{dx}{ds}$ para el mismo intervalo se tiene:

$$\theta' - a\,\theta'' = \alpha N$$

Por otro lado

$$\theta' + \theta'' = \Sigma P$$

De donde deducimos:

$$\theta' = \frac{1}{1+a}(a\Sigma P + \alpha N) = \frac{1}{1+a}\left(a\,\Sigma P + \alpha \Sigma_{1}^{r-1} \pi\right) \quad (2)$$

$$\theta'' = \frac{1}{1+a}\left(\Sigma P - \alpha N\right) = \frac{1}{1+a}\left(\Sigma P - \alpha \sum_{1}^{r-1} \pi\right) \quad (3)$$

La estática exige que θ' y θ'' sean constantes en todo el paño. Esta condición se realiza si las cabezas son rectilíneas de un montante a otro, pues entonces a y α son constantes.

FIG III

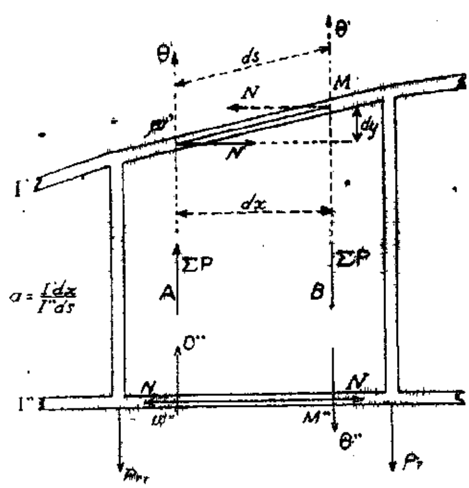
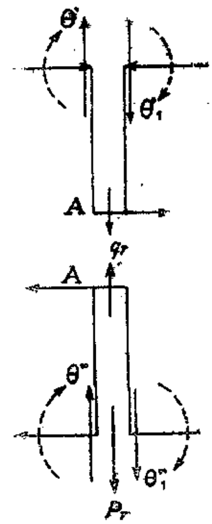


FIG IV



Aislemos un trozo superior del montante N.° r por una sección horizontal A y dos secciones verticales inmediatamente a derecha e izquierda. Tenemos la solicitación dada por la fig. 4 y la ecuación estática de las componentes verticales nos da:

$$q_r - \theta' + \theta'_1 = 0 \quad \text{de donde} \quad q_r - \theta' = -\theta'_1$$

El trozo inferior nos da:

$$q_r + \theta'' - P_r - \theta''_1 = 0 \quad \text{de donde} \quad q_r + \theta'' - P_r = \theta''_1$$

Llamando T_r el esfuerzo de corte total en el intervalo de los montantes r y $r+1$ tenemos entonces, aplicando las fórmulas (2) y (3)

$$q_r - \theta'_r = -\frac{a\,T_r}{1+a} - \frac{\alpha}{1+a}\Sigma_1^r \pi \qquad (4)$$

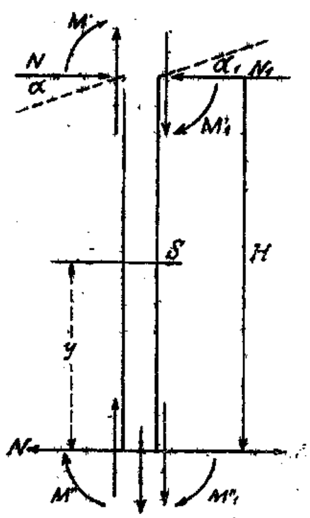
$$q_r + \theta''_r - P_r = \frac{T_r}{1+a} - \frac{\alpha}{1+a}\Sigma_1^r \pi \qquad (5)$$

Cabe observar aquí que a y α corresponden al paño que va del montante r al $r+1$.

Para el montante N.° 1, el del apoyo, tenemos:

$$q_1 = \frac{a \top_1}{1+a} + \frac{\alpha \ \pi_1}{1+a}$$

FIG V



Aislando un montante completo de sus dos cabezas, tenemos la solicitación de la fig. 5. La ecuación estática del momento nos da:

$$(N_1 - N)\ H = M' + M'' + M'_1 + M''_1$$

de donde

$$\pi_r\ H = (1 + \alpha)\ M'' + (1 + a_1)\ M''_1$$

Si S es la sección para la cual el momento de flexión sobre el montante es nulo, o sea el punto de inflexión, tenemos:

$$(N_1 - N)\ y = M'' + M''_1$$

luego

$$y = \frac{M'' + M_1''}{\pi_r} = \frac{(M'' + M''_1)\ H}{(1+a)\ M'' + (1+a_1)\ M''_1}$$

Admitiendo $I' = I''$ tenemos $a = \cos \alpha$, $a_1 = \cos \alpha_1$

Prácticamente no hay error sensible si se toma: $a = a_1 = \dfrac{a + a_1}{2}$

lo que da:

$$y = \frac{H}{1 + \dfrac{a + a_1}{2}} \qquad (6)$$

He aquí, conocido a priori, el punto de inflexión S sobre cada montante. Sobre el montante de apoyo, N.° 1, tenemos:

$$\pi_1 H = M'_1 + M''_1$$

$$\pi_1 = \frac{(1+a) \quad M''_1}{H}$$

$$\pi_1 y = M''_1$$

$$y = \frac{M''_1}{\pi_1} = \frac{H}{1+a}$$

Llamando M_r el momento flexionante en el montante r, tenemos para una sección inmediatamente a izquierda del montante:

$$M'_r + M''_r + NH_r - M_r = o$$

Combinando con la fórmula (1) deducimos:

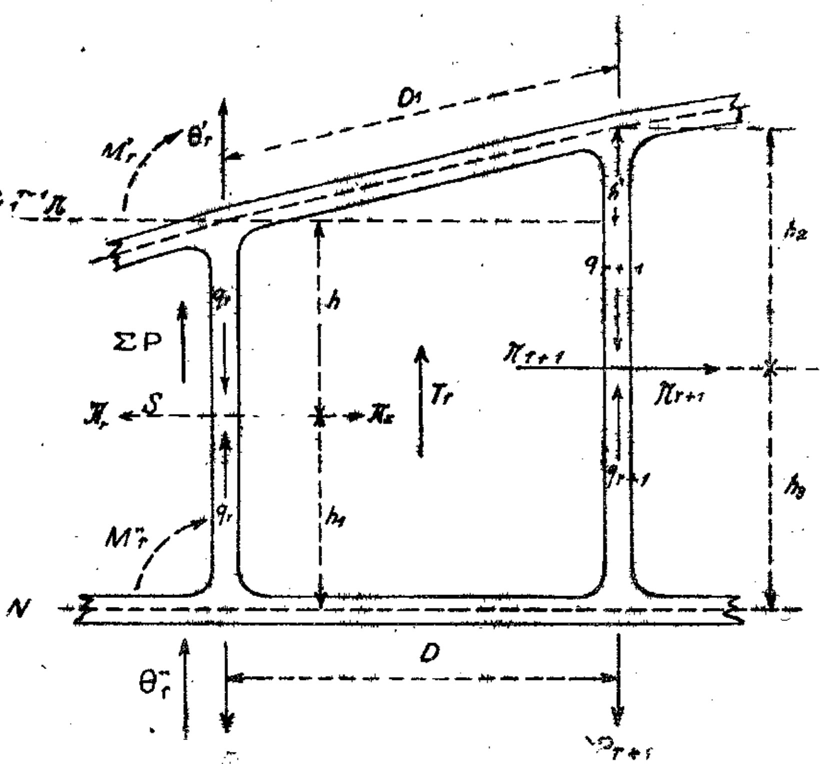
$$M'_r = \frac{a}{1+a} M_r - \frac{a \ H_r}{1 + a} \sum_1^{r-1} \pi \qquad (7)$$

$$M''_r = \frac{1}{1+a} M_r - \frac{H_r}{1+a} \sum_1^{r-1} \pi \qquad (8)$$

El valor *a* corresponde al paño comprendido entre el montante *r—1* y *r*.

Estudiaremos ahora un paño cualquiera de nuestra viga. Sea el que va del montante r al $r + 1$ (fig. 6).

FIG VI



Lo cortamos en dos trozos por las secciones Sr y S_{r+1} a nivel de los puntos de inflexión sobre los montantes.

Hemos visto que el desplazamiento $\delta'_{\times}$ de Sr con respecto a S_{r+1} calculados en función de las fuerzas y dimensiones del trozo superior es igual a $\delta''_{\times}$ de Sr con respecto a S_{r+1} calculado en función de las fuerzas y dimensiones del trozo inferior. Mediante las fórmulas generales de las deformaciones llegamos a:

$$E\delta'_x = \pi_r \left[\frac{h^3}{3I_m} + \frac{D_1}{I'_c}\left(h^2 + \frac{1}{3}h'^2 + hh'\right)\right] + \frac{DD_1}{I'_c}\left(\frac{h}{2} + \frac{h'}{3}\right)\left(q_r + \frac{N\,h'}{D}\,\theta'_r\right) -$$

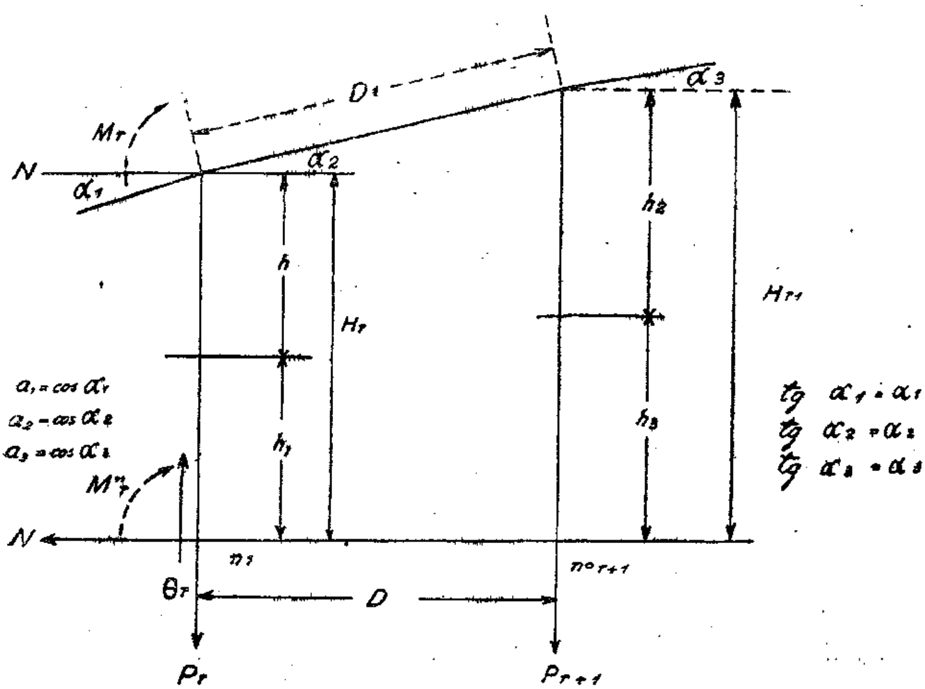
$$- \frac{D_1}{I'_c}\left(h + \frac{1}{2}h'\right)M'_r - \pi_{r+1}\,\frac{h_2^2}{2I_m}\left(\frac{-1}{3}h_2 + h + h'\right)$$

$$E\delta''_x = -\pi_r\left(\frac{h^3_1}{3I_m}+\frac{h^2_1D}{I''_c}\right)+\frac{h_1D^2}{2I''_c}\left(q_r+\theta''_r-P_r\right)+\frac{h_1DM''_r}{I''_c}+\pi_{r+1}\frac{h^2_3}{2I_m}\left(h_1-\frac{1}{3}h_3\right)$$

Estableciendo la igualdad entre los segundos miembros de esas dos expresiones e introduciendo inmediatamente la simplificación:

$$I_m = I'_e = I''_c$$

FIG VII



Obtenemos:

$$+\frac{\pi_{r+1}}{2}\left[h^2_2\left(h+h'-\frac{1}{3}h_2\right)+h^2_3\left(h_1-\frac{1}{3}h_3\right)\right]=\pi_r\left[\frac{h^3+h^3_1}{3}+D_1\left(h^2+hh'+\frac{h'^2}{3}\right)^2+Dh_1^2\right]-$$

$$-D_1\left(h+\frac{h'}{2}\right)M'_r - Dh_1M''_r + DD_1\left(\frac{h}{2}+\frac{h'}{3}\right)\left(q_r-\theta'_r\right)-\frac{1}{2}h_1D^2\left(q_r+\theta''_r-P_r\right)+$$

$$+D_1h'\left(\frac{h}{2}+\frac{h'}{3}\right)N \qquad (9)$$

Los términos que entran en esta ecuación salen de (4) (5) (6), (7) y (8). Los valores correspondientes en el caso del paño que va del montante r al $r+1$ (fig. 7) son:

$$h = H_r - h_1$$

$$h_1 = \frac{H_r}{1+\frac{1}{2}\left(a_1+a_2\right)}$$

$$h_2 = H_{r+1} - h_3$$

$$h_3 = \frac{H_{r+1}}{1+\frac{1}{2}\left(a_2+a_3\right)}$$

$$M'_r = \frac{a_1}{1+a_1}M_r - \frac{a_1}{1+a_1}H_r\sum_1^{r-1}\pi$$

$$M_r'' = \frac{1}{1+a_1}M_r - \frac{H_r}{1+a_1}\sum_1^{r-1}\pi$$

$$q_r-\theta_r' = \frac{a_2}{1+a_2}T_r - \frac{a_2}{1+a_2}\sum_1^{r-1}\pi$$

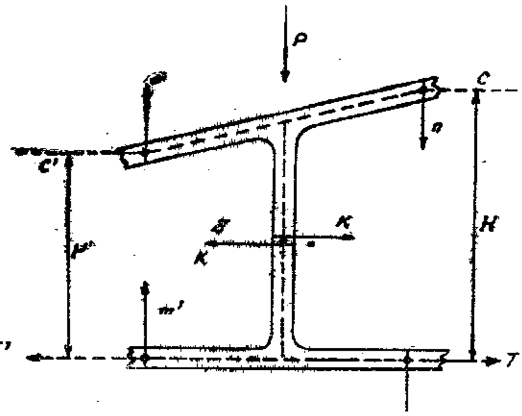
$$q_r+\theta''_r-P_r = \frac{T_r}{1+a_2} - \frac{a_2}{1+a_2}\sum_1^{r}\pi$$

La ecuación (9) da π_{r+1} en función de los π de índice inferior y por consiguiente de π_1. Resuelve entonces el problema.

TEORÍA DEL CÁLCULO APROXIMADO

1). Todas las barras se suponen articuladas a igual distancia de los puntos de apoyo o nudos y encastradas en esos nudos.

2). En las articulaciones de las cabezas actúan tensiones longitudinales mar-



cadas CyC' en la superior y T y T' en la inferior (véase Fig. 8) Estas tensiones se determinan por la condición:

$$C = T = \frac{M}{H}$$

M es el momento de flexión en las articulaciones consideradas y H el brazo de palanca de la tensión buscada respecto a la tensión opuesta.

3). En las articulaciones de las cabezas actúan también esfuerzos normales, marcados *m* y *n*, en las articulaciones de la derecha, y cuya intensidad se obtiene por la relación:

$$m + n = E$$

Siendo E el esfuerzo de corte en dichas articulaciones.

Para cada uno de los valores *m* y *n* vale en este caso la misma deducción de la teorío Viorendeel haciendo $n = \theta$, $m = \theta''$ y $E = \Sigma P$.

Los valores son dados por:

$$n = \frac{1}{1+a} (a \, \Sigma P + \alpha N) \quad ; \quad m = \frac{1}{1+a} (\Sigma P - \alpha N)$$

4). El punto medio de los montantes está sometido (en sus articulaciones de juntura) a un esfuerzo transversal $K = C - C'$ o igual a $T - T'$.

El montante está sometido a una tensión longitudinal dada por la diferencia máxima entre los esfuerzos verticales de las cabezas adyacentes.

CALCULOS

CARACTERÍSTICAS Y SOLICITACIONES

Características del puente.—El puente que nos ocupa está destinado al atravieso del río Mapocho en la nueva canalización, para comunicar la Avenida Santa María con Providencia, donde actualmente está el puente llamado del Arzobispo.

Se ha proyectado de concreto armado de 44,40 mts. de luz entre apoyos, vía inferior, tablero de adoquines de piedra sobre arena de 7 mts. de ancho y pasillo exterior de 1,60 m.

Las vigas maestras son arcadas de cabezas no paralelas con montantes cada 5,55 mts.

Tablero.—El tablero está constituído por travesaños distantes de 2,775 m. de eje a eje. Sobre estos travesaños descansan longuerinas espaciadas de 1 m., las cuales reciben la losa armada que soporta el adoquinado.

Carga a plomo de cada montante.—La carga que da el peso muerto sobre cada montante de las vigas es de 42 215 klg.

Adoptando una carga uniformemente repartida de 500 klgs. por m2. se tiene

$$\frac{7 \times 5.55 \times 500}{2} = 9\,712'5$$ klgs. que sumado al peso muerto producen en cada montante una carga total de $42\,215 + 9\,712'5 = 51\,927,5$. Se ha tomado 52 000 klgs.

Características de la viga.—Con las características de la viga se ha formado el cuadro que va a continuación:

montante	Paño	α	$a=\cos\alpha$	$a = \operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a}{1+a}$	$\frac{1}{1+a}$	$\frac{\alpha}{1+a}$	D_1	H	T	M
										R=208t	tm
1		25° 6'6"							0,00	1	M =0
	1 a 2		0,90556	0,468468	0,47522	0,52478	0,24584	6,129		T=182	1
2		16°33'7							2,60	1	M =1010,
	2 a 3		0,9585	0,2973	0,4894	0,5106	0,1518	5,7905		T=130	2
3		12°26'							4,25	2	M =1731,6
	3 a 4		0,97600	0,2198	0,4939	0,5061	0,11123	5,6865		T =78	3
4		5°12'							5,47	3	M =2164,5
	4 a 5		0,99605	0,0883	0,4990	0,5010	0,0442	5,572		T=26	4
5									5,96	4	M =2308,8
											5

D_1 = desarrollo de la cabeza superior entre montantes.
T = esfuerzo de corte en caso de simple apoyo.
M = momento de flexión en caso de simple apoyo.

CÁLCULO SEGÚN LA TEORÍA DE VIERENDEEL

1) Puntos de inflexión. Los puntos de inflexión de los montantes nos son dados por la ec (6)

Primer montante	$H_1 = 0$	$y_1 = 0$
Segundo montante.............	$H_2 = 2{,}60$	$y_2 = 1{,}346$
Tercer montante	$H_3 = 4{,}25$	$y_3 = 2{,}160$
Cuarto montante	$H_4 = 5{,}47$	$y_4 = 2{,}754$
Quinto montante	$H_5 = 5{,}96$	$y_5 = 2{,}986$

Determinación de cada uno de los valores π.—En el caso actual no hay necesidad de recurrir a las ecuaciones estáticas para determinar estos valores, pues la carga está dispuesta simétricamente sobre el puente. Basta calcular la mitad de los π, pues se tiene:

$$\pi_r = -\pi_{n+2-r}$$

Como el número de paños es par se tiene:

$$\pi_{\frac{n}{2}+1} = 0$$

En la viga de este puente:

$$\pi_{\frac{n}{2}+1} = \pi_5 = 0$$

Primer paño.—Los valores π salen de la fórmula (9). En el caso del primer paño ella vale:

$$\frac{\pi_2}{2}\left[h_2^2\left(h+h'-\frac{1}{3}h_2\right)+h_3^2\left(h_1-\frac{1}{3}h_3\right)\right]={}_1s\left[\frac{h^3+h_1^3}{3}+D_1\left(h^2+hh'+\frac{h'^2}{3}\right)+Dh_1^2\right]-$$

$$-DD_1\left(\frac{h}{2}+\frac{h'}{3}\right)q_1-\frac{1}{2}h_1D^2\left(-q_1+R_1\right)$$

Los valores h_1, h_2, h_3, h' son dados por las expresiones (10)

En cuanto a q_1 vale:

$$q_1 = \frac{a\,T_1}{1+a} + \frac{a'\,\pi_1}{1+a}$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
H_r &= H_1 = 0 \\
h_1 &= 0 \qquad \text{luego} \qquad h = 0 \\
h_3 &= 1{,}346 \\
h_2 &= 1{,}254 \\
h' &= 2{,}60 \\
q_1 &= 86490{,}04 + 0{,}24584\ \pi_1
\end{aligned}$$

La expresión de π queda:

$$1{,}3092\ \pi_2 = 6{,}563\ \pi_1 - 2549707{,}902$$

o sea

$$\pi_2 = 5{,}012985\ \pi_1 - 1947531{,}24198$$

Segundo paño.—Para este paño la fórmula queda:

$$\frac{1}{2}\pi_3\left[h_2^2\left(h+h'-\frac{1}{3}h_2\right)+h_3^2\left(h_1-\frac{1}{3}h_3\right)\right]=\pi_2\left[\frac{h^3+h_1^3}{3}+D_1\left(h^2+hh'+\frac{h'^2}{3}\right)+Dh_1^2\right]-$$

$$-D_1\left(h+\frac{h'}{2}\right)M'_2-Dh_1M''_2+DD_1\left(\frac{h}{2}+\frac{h'}{3}\right)q_2-\theta'_2-\frac{1}{2}h_1D^2\left(q_2+\theta''_2-P_2\right)+$$

$$D_1h'\left(\frac{h}{2}+\frac{h'}{3}\right)\pi_1$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
h_2 &= 4{,}25 - 2{,}16 = 2{,}09 \\
h &= 2{,}60 - 1{,}346 = 1{,}254 \\
h_1 &= 1{,}346 \\
h_3 &= 2{,}160 \\
h' &= 4{,}25 - 2{,}60 = 1{,}65 \\
H_r &= 2{,}60 \\
H_{r+1} &= 4{,}25
\end{aligned}$$

Además las siguientes expresiones:

$$M'_2 = \frac{a}{1+a} M_2 - \frac{a}{1+a} H_r \sum_1^{r-1} \pi$$

$$M''_2 = \frac{1}{1+a} M_2 - \frac{H_r}{1+a} \Sigma_1^{r-1} \pi$$

$$q_2 - \theta'_2 = - \frac{a}{1+a} T_2 - \frac{\alpha}{1+a} \pi \sum_r^1$$

$$q_2 + \theta''_2 - P_2 = \frac{T_2}{1+a} - \frac{\alpha}{1+a} \sum_1^r \pi$$

Con los valores del cuadro de características de la viga se tiene:

$$M_2' = 480019{,}722 - 1{,}2356\ \pi_1$$

$$M_2'' = 530080{,}278 - 1{,}36443\ \pi_1$$

$$q_2 - \theta'_2 = - 63622 - 0{,}1518\ (\pi_1 + \pi_2)$$

$$q_2 + \theta''_2 - P_2 = 66378 - 0{,}1518\ (\pi_1 + \pi_2)$$

La expresión de π queda ahora:

$$6{,}28118\ \pi_3 = 37{,}86685\ \pi_2 - 13521112{,}42404 + 36{,}31285\ \pi_1 - 2{,}59509\ (\pi_1 + \pi_2)$$

Colocando π_2 por su valor anterior se llega finalmente a

$$\pi_3 = 33{,}51993\ \pi^1 - 13088936{,}6878$$

Tercer paño.—Se aplica en este paño la misma fórmula que he anotado para el 2.° paño.

En este caso:

$$h_1 = 2,16$$
$$h_3 = 2,754$$
$$h = 2,09$$
$$h_2 = 2,716$$
$$h' = 1,22$$
$$M'_r = M'_3 = 847445,04 - 2,07885\ (\pi^1 + \pi_2)$$

$$M_r'' = M_3'' = 884154,94 - 2,17005\ (\pi_1 + \pi_2)$$

$$q_3 - \theta_3' = -\ 38524,2 - 0,11123\ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$$

$$q_3 + \theta''_3 - P_3 = 39475,8 - 0,11123\ (\pi_1 + \pi + {}_2 + \pi_3)$$

$$N = \Sigma_1^{r-1}\ \pi = \pi_1 + \pi_2$$

Con estos valores y reemplazando π_2 y π_3 en función de π_1 se llega:

$$\pi_4 = 209,8504\ \pi_1 - 81943340,5562$$

Cuarto paño.— Se tiene:

$$h_1 = 2,754$$
$$h_3 = 2,986$$
$$h = 2,716$$
$$h_2 = 2,974$$
$$h' = 0,49$$

$$M'_r = M'_4 = 1069046,55 - 2,7016\ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$$

$$M''_r = M''_4 = 1095453,45 - 2,76837\ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$$

$$q'_4 - \theta'_4 = -\ 12974 - 0,0442\ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)$$

$$q'_4 + \theta_4'' - P_t = 13026 - 0,0442\ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)$$

$$N = \Sigma_1^{t-1}\ \pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

La ecuación general lleva a:

$$17{,}6346\ \pi_5 = 25519{,}20723\pi_1 - 9964018480{,}32198$$

Haciendo $\pi_5 = 0$ se deduce

$$\pi_1 = \frac{9964018480{,}32198}{25519{,}20723} = 390451{,}7253$$

Conocido este valor, se tiene:

$$\pi_2 = 5{,}01299 \times 390451{,}7253 - 1947531{,}24198 = +9803{,}2554$$

$$\pi_3 = 33{,}51993 \times 390451{,}7253 - 13088936{,}6878 = -994{,}8658$$

$$\pi_4 = 209{,}8504 \times 390451{,}7253 - 81943340{,}5562 = -7046{,}0650$$

Sumas π

$$\Sigma\pi_1 = 390451{,}7253$$

$$\Sigma\pi_1 + \pi_2 = 400254{,}9807$$

$$\Sigma\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 399260{,}1149$$

$$\Sigma\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 392214{,}0499$$

Valores θ' *y* θ''

Primer paño:

$$\theta' = 0{,}52478\ (0{,}90556 \times 182000 + 0{,}4685 \times 390451{,}7) = +\ 182486{,}23$$

$$\theta'' = 0{,}52478\ (182000 - 0{,}4685 \times 390451{,}7) = -\ 486{,}2323$$

$$\Sigma\ P = +\ 182000$$

Segundo paño.:

$$\theta' = 0{,}5106\ [0{,}9585 \times 130000 + 0{,}2973 \times 400254{,}98] = +\ 124382$$

$$\theta'' = 0{,}5106\ [130000 - 0{,}2973 \times 400254{,}98] = +\ 5618$$

$$\Sigma\ P = +\ 130000$$

Tercer paño:

$$\theta' = 0{,}5061\,[0{,}976 \times 78000 + 0{,}2198 \times 399260] = \quad + 82940$$

$$\theta'' = 0{,}5061\,[78000 - 0{,}2198 \times 399260] = \quad - 4940$$

$$\Sigma P = + \quad 78000$$

Cuarto paño:

$$\theta' = 0{,}501\,[0{,}99605 \times 26000 + 0{,}0883 \times 392214] = \quad + 30325$$

$$\theta'' = 0{,}501\,[26000 - 0{,}0883 \times 392214] = - \quad 4325$$

$$\Sigma P = \quad 26000$$

Resumen de valores θ.

PAÑO	VALOR θ	VALOR θ''	TOTALES = ΣP
1	+182486	—486	+182000
2	+124382	+5618	+130000
3	+82940	—4940	+78000
4	+30325	—4325	+26000
5	—30325	+4325	—26000

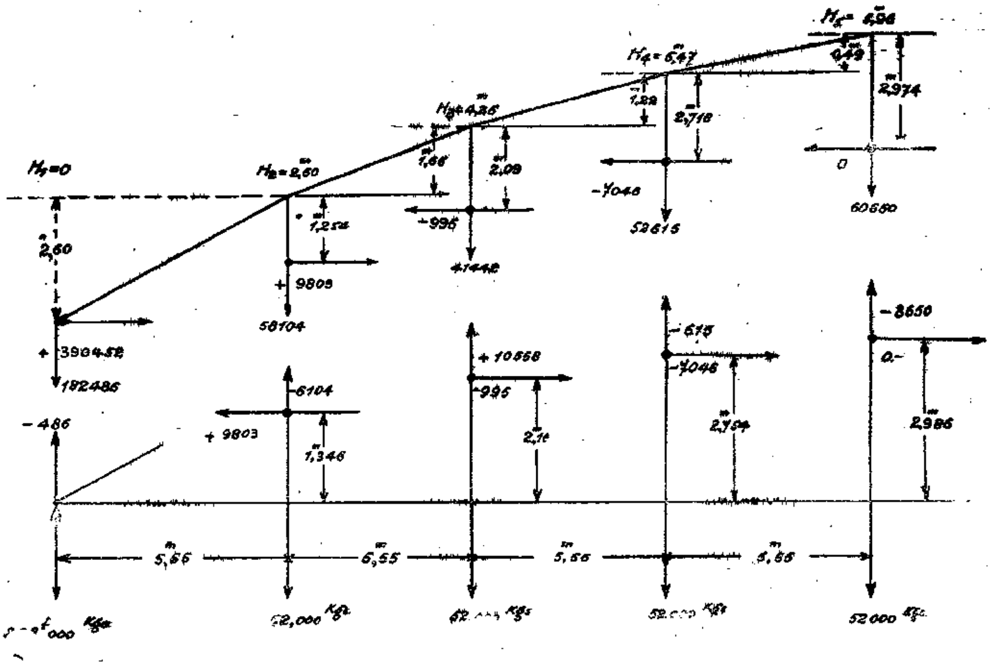
Aislando cada montante en su punto de inflexión tengo la solicitación que indico en la figura adjunta.

MOMENTOS

Cabezas inferiores

Momentos de las cargas verticales θ''

Montante	Momentos en el arranque inferior
1	0
2	—486 × 5,55 = — 2697,3 Klgmts.
3	—486 × 2 ×5,55—6104 × 5,55 = — 39271,8
4	—486 × 3×5,55—6104 × 2 × 5,55 + 10558 × 5,55 = —17249,4
5	—486 × 4×5,55—6104×3×5,55+10558×2× 5,55—6155,55 = +1359,75



Momentos de las cargas horizontales π

Montante	Valor π	Distancia al punto de inflexión	Momentos A la izquierda	Momentos A la derecha
1	+390451,7	0	0. . . .	0,00
2	+9803,3	1,346	0,00	+13195,24
3	—995	2,160	+13195,24	+11046,04
4	—7046	2,754	+11046,04	—8358,6
5	0	2,986	—8358,6	—8358,6

Valores totales:

Montante	Producidos por Cargas horizontales	Producidos por Cargas verticales	Totales
1	0,000	0,000	0,000
2	+13195,24	—2697,3	+10498
3	+13195,24 +11046,04	—39271,8	—26076,56 —28225,76
4	+11046,04 —8358,60	—17249,4	—6203,36 —25608
5	—8358,60	+1359,75	—6999

Cabezas superiores:

Momentos de las cargas verticales:

Montante en el arranque superior	Momentos		
1	0,000	=	+0,0
2	+182486 × 5,55	=	+1012797,3
3	+182486 × 11,1 — 58104 × 5,55	=	+1703117,4
4	+182486 × 16,65 — 58104 × 11,1 — 41442 × 5,55	=	+2163434,4
5	+182486×22,2—58104×16,65—41442×11,1—52615×5,55	=	2331738,15

Momentos de las cargas horizontales:

Montante	Valores π	Ordenada del punto de inflexión al arranque sup. del montante	Momentos	
			A la izquierda	A la derecha
1	+390451,7	0		0,000
2	+390451,7 +9803,3	2,60 1,254	1015174,52	+1027467,7582
3	+390451,7 +9803,3 —995	4,25 2,904 2,09	1687888,5082	+1685808,9582
4	+390451,7 +9803,3 —995 —7046	5,47 4,124 3,31 2,716	2172906,1582	+2153769,222
5	+390451,7 +9803,3 —995 —7046	5,96 4,614 3,80 3,206	+2345854,0822	×2345954,0822

Resumen de momentos:

Montante	Momentos producidos por		Totales	
	Cargas θ'	Cargas π	Izquierda	Derecha
1	0	0	0,00	0,00
2	—1012797,3	+1015174,42 +1027467,76	+2377,1	+14670,46
3	—1703117,4	+1687888,5082 +1685808,9582	—15228	—17308,4
4	—2163434,1	+2172906,1582 +2153769,1222	—9471,76	+9665,20
5	—2331738,15	+2345954,0822	+14215,93	

CÁLCULO SEGÚN LA TEORÍA APROXIMADA

Valores K. (Corresponde a los valores π de la teoría Vierendeel). Esfuerzos horizontales. El valor K es dado por la expreión:

$$K = \frac{M}{H} - \frac{M'}{H'}$$

en la cual:

M = Momento en la mitad del paño considerado
M' = Momento en la mitad del paño anterior
H = Altura de la mitad del paño
H' = Altura de la mitad del paño anterior.

Primer paño.—En el presente caso el primer paño es un sistema triangulado. Puede determinarse directamente el valor K por las ecuaciones estáticas. Aislemos el primer paño en su mitad. Consideremos el trozo de la izquierda y supongamos articulaciones en los puntos cortados. Reemplacemos las fuerzas de equilibrio de la parte aislada por sus componentes horizontales y verticales. Sean C y n en la articulación superior y T y m en la inferior.

Debemos tener:

Ec. de proyección horizontal: $C - T = 0$

Ec. de momentos: $182 \,.\, 2{,}775 = C \,.\, 1{,}30$

luego

$$C = K = \frac{182.2{,}775}{1{,}30} = 388{,}5 \text{ ton.}$$

Segundo paño.—Se aplica la expresión de K anotada arriba. Del cuadro de características de la viga se saca:

$$M = \frac{M_2 + M_3}{2} = 1370{,}85 \text{ ton|m.}$$

$$M' = \frac{M_1}{2} = 505{,}05$$

$$H' = 1{,}30 \text{ m.}$$

$$H = 3{,}425$$

El valor K será entonces:

$$K = \frac{1370{,}85}{3{,}425} - \frac{505{,}05}{1{,}30} = 400{,}248 - 388{,}500 = 11{,}748$$

Tercer paño.—Se tiene:

$$M = \frac{M_3 + M_4}{2} = 1948{,}05 \text{ ton|m.}$$

$$M' = \qquad 1370{,}85 \text{ ''}$$

$$H = 3{,}425$$

$$H' = 4{,}86$$

$$K = \frac{1948{,}05}{4{,}86} - \frac{1370{,}85}{3{,}425} = 400{,}833 - 400{,}248 = +\ 0{,}585$$

Cuarto paño.—En este paño:

$$M = \frac{M_4 + M_5}{2} = 2236{,}65$$

$$M' = 1948{,}05$$
$$H = 4{,}86$$
$$H' = 5{,}715$$
$$K = \frac{2236{,}65}{5{,}715} - \frac{1948{,}05}{4{,}86} = 391{,}365 - 400{,}833 = -9{,}468$$

Valores n y m

Esfuerzos verticales.—Corresponden a los valores θ' y θ'' de la teoría Vierendeel Se aplican las siguientes fórmulas:

$$n = \frac{1}{1+a}\left(a\,\Sigma P + \alpha N\right)$$
$$m = \frac{1}{1+a}\left(\Sigma P - \alpha N\right)$$

Con los datos del cuadro de características y $N = \Sigma K$ se determinan n y m para todos los paños.

Primer paño.—Se tiene:

		Kgs.
$n = 0{,}52478\ (0{,}90556 \cdot 182000 + 0{,}468468 \cdot 388500)$	=	182000
$m = 0{,}52478\ (182000 - 182000)$	=	0
$\Sigma P = m + n$	=	182000

Segundo paño:

$n = 0{,}5106[0{,}9585 \cdot 130000 + 0{,}2973 \cdot 400248] =$	+	124380
$m = 0{,}5106\ [130000 - 0{,}2973 \cdot 400248] =$	+	5620
$m + n$	=	130000

Tercer paño:

$n = 0{,}5061\ [0{,}976 \cdot 78000 + 0{,}2198 \cdot 400833] =$	+	83114
$m = 0{,}5061\ [78000 - 0{,}2198 \cdot 400833] =$	−	5114
$\Sigma P =$		78000

Cuarto paño:

$$n = 0{,}501\,\{0{,}99605 \,.\, 26000 + 0{,}0883 \,.\, 391365\} = \qquad + \quad 30287$$

$$m = 0{,}501\,\{26000 - 0{,}0883 \,.\, 391365\} = \qquad - \quad 4287$$

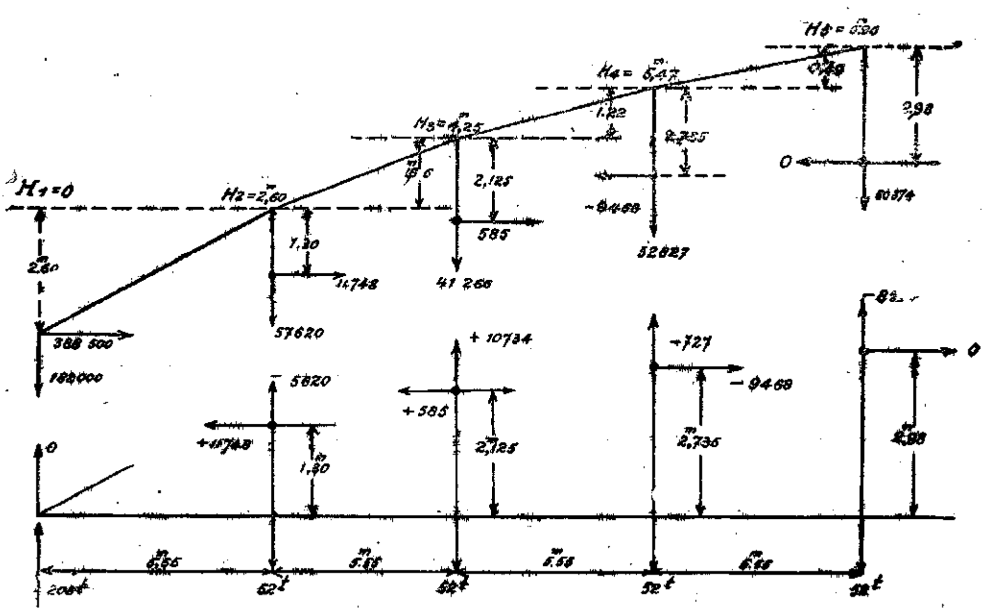
$$\Sigma P = \qquad 26000$$

Resumen de valores *K*, *m* y *n* según el resultado aproximado:

Paños	Cargas horizontales	Cargas Verticales	
	Valores K Kgs.	Cabeza superior n	Cabeza inferior m
1	+388500	+182000	0
2	+11748	+124380	+5620
3	+585	+83114	—5114
4	—9468	+30287	—4287
5	0	—30287	+4287

Aislando cada montante en su punto medio se tiene la solicitación de la figura IX

FIG IX



MOMENTOS

Cabezas inferiores.

Momentos producidos por las cargas verticales:

Montante	Momentos	
1	0	
2	0	
3	—5620 . 5,55 =	—31191
4	—5620 . 11,1 + 10734 . 5,55 =	—2808,3
5	—5620 . 16,65 + 10734 . 11,1 — 727 . 5,55 =	+21539,55

Momentos producidos por las cargas horizontales:

Montante	Valor K	Dist. del punto medio	Momentos	
			A la izq.	A la derecha
1	+388500	0	0	0,
2	+11748	1,30	0	11748 . 1,30 = + 15272,4
3	+585	2,125	15272,4	+ 585 . 2,125 = +16515,5
4	—9468	2,735	16515,5	—9468 . 2,735 = —9379,5
5	0	2,98	—9379,5	

VALORES TOTALES

Montante	Producidos por		TOTALES
	Cargas horizontales	Cargas verticales	
1—	0,	0,	0,
2—I.	0,	0,	0,
—D	+15272,4	0,	+15272,4
3—I.	+15272,4	—31191	—15919
D—	+16515,5	—31191	—14675
4—I.	+16515,5	—2808,3	+13707
—D	—9379,5	—2808,3	—12188
5—I.	—9379,5	+21539,55	+12160

Cabezas superiores.

Momentos de las cargas verticales:

Montante	Momentos	
1	0	= 0,
2	+182000 . 5,55 =	+1010100
3	+182000 . 11,1—57620 . 5,55 =	+1700409
4	+182000 . 16,65—57620 . 11,1—41266 . 5,55 =	+2160715
5	+182000 . 22,2—57620 . 16,65—41266 . 11,1—52827 . 5,55	= 2329007,5

Momentos de las cargas horizontales:

Montante	Valores K.	Ordenada del punto medio del montante al arranque sup.	Momentos A la izquierda	Momentos A la derecha
1	+388500	0	0,00	0,00
2	+388500 +11748	2,60 1,30	+1010100	+1025372,4
3	+388500 +11748 +585	4,250 2,950 2,125	+1685781,6	+1687024,73
4	+388500 +11748 +585 —9468	5,47 4,17 3,345 2,735	+ 2176041	+2150146
5	+388500 +11748 +585 —9468	5,96 4,66 3,835 3,225	+2341915	+ 2341915

Resumen de Momentos:

MONTANTE	Producidos por		TOTALES	
	Cargas vertical.	Cargas horiz.	Izquierda	Derecha
1	0	0	0	0
2—I..........		+1010100	0	
—D	—1010100	+1025372	......	+15273
3—I..........	......	+1685782	—14627	......
—D	—1700409	+1687025	......	—13384
4—I..........	......	+2176041	+15326	......
—D	—2160715	+2150146	......	—10569
5—I..........	......	+2341915	+13907	......
—D	—2329008	+2341915	......	+13907

TASAS DE TRABAJO

Montantes.—Los montantes trabajan a la tracción. Se ha dispuesto que las armaduras trabajen por sí solas a los esfuerzos totales.

Para los montantes se tienen los esfuerzos siguientes:

VALORES	MONTANTE N.°							
	2		3		4		5	
	Vierendeel	Cálculo Aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.
Esfuerzos directos......	+58104	+57620	+41442	+41266	+52615	+52827	+60650	+60574
Id. horizontales.........	+9803	+11748	—995	+585	—7045	—9468	0	0
Brazo de palanca del esfuerzo horizontal a la sección más fatigada...	0,4	0,35	0,7	0,67	1,30	1,29	....	....
Momentos en la sección más fatigada	3920	4112	—696,5	390	—9159	—12200	0	0
Tasa de trabajo de las armaduras en la misma sección en K|mm2.	793	797	468	453	588	676	640	638
Tasa del concreto......	16,7	18,5	8,5	8,1	19,4	23,1	10,9	10,9

Cabezas inferiores

Trabajan también a la tracción.—Se ha dispuesto que las armaduras trabajen por sí solas a los esfuerzos calculados. El concreto sirve únicamente como envoltura de las armaduras. A fin de que no se produzcan grietas en el concreto se ha admitido una verificación de 24 K:cm2. para la tracción del concreto.

Para las cabezas inferiores se tienen los siguientes esfuerzos:

VALORES	CABEZA DEL PAÑO N.°							
	I		II		III		IV	
	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.
Esfuerzos directos	390452	388500	400255	400248	399260	400833	392214	391365
Momentos en la sección más fatigada:								
A la Derecha	2000	....	18200	9000	10500	8500	10560	6600
A la Izquierda	....	....	3000	9000	23100	8500	21560	6060
Tasa de trabajo de las armaduras	578	567	656	622	670	618	657	601
Id. del concreto	22,5	21,8	26,7	24,7	27,8	24,6	27	23,6

CABEZAS SUPERIORES

Se tienen los siguientes valores:

VALORES	CABEZA DEL PAÑO N°							
	I		II		III		IV	
	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.	Vierendeel	Cálculo aprox.
Esfuerzos directos	390452	388500	400255	400248	399260	400833	392214	391365
Esfuerzos normales	432000	428808	419000	417360	410000	410690	394000	392937
Momentos en la sección más fatigada:								
A la Derecha	2060	....	7240	7000	2131	7000	5600	4800
A la Izquierda	1380	....	9500	9800	11030	5100	2448	3800
Tasas máx. de trabajo:								
Armaduras K/mm2.	564	554	575	577	572	557	527	525
Concreto K/mm2.	37,4	37.	38,3	38,8	38,5	37,4	35,4	35,1

Errores relativos

De los cuadros comparativos de esfuerzos para los montantes sacamos los siguientes valores para los errores relativos de las tasas de trabajo:

ERROR EN %

Montante N.°	2	3	4	5
Para el concreto	+10,8	—4,7	+19	0
Para las armaduras	+ 0.5	—3,2	+15	—0,3

Para las cabezas tenemos los siguientes valores:

ERROR EN %

PAÑO N.°	I	II	III	IV
Cabeza inferior: Para el concreto	—3,1	—7,7	—11,5	—12,6
Para las armaduras	—1,9	—5,2	—7,8	—7
Cabeza superior: Para el concreto	—1,1	+1,3	—2,9	—0,9
Para las armaduras	—1,8	+0,3	—2,6	—0,4

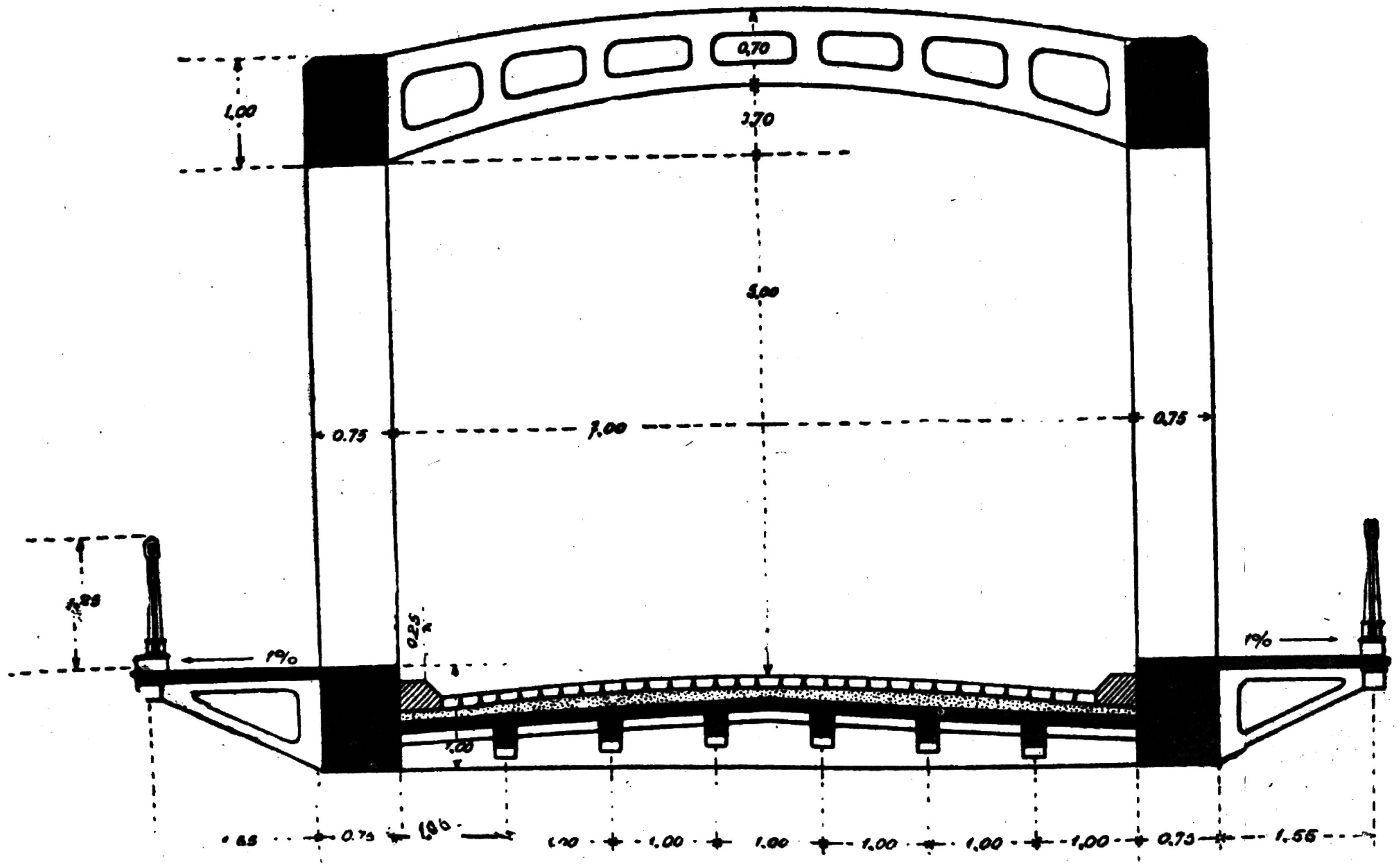
Aunque no es posible establecer deducciones generales del caso que nos ocupa es interesante anotar que para soluciones corrientes basta con la aplicación del cálculo aproximado. La práctica sanciona este método como muy expedito.

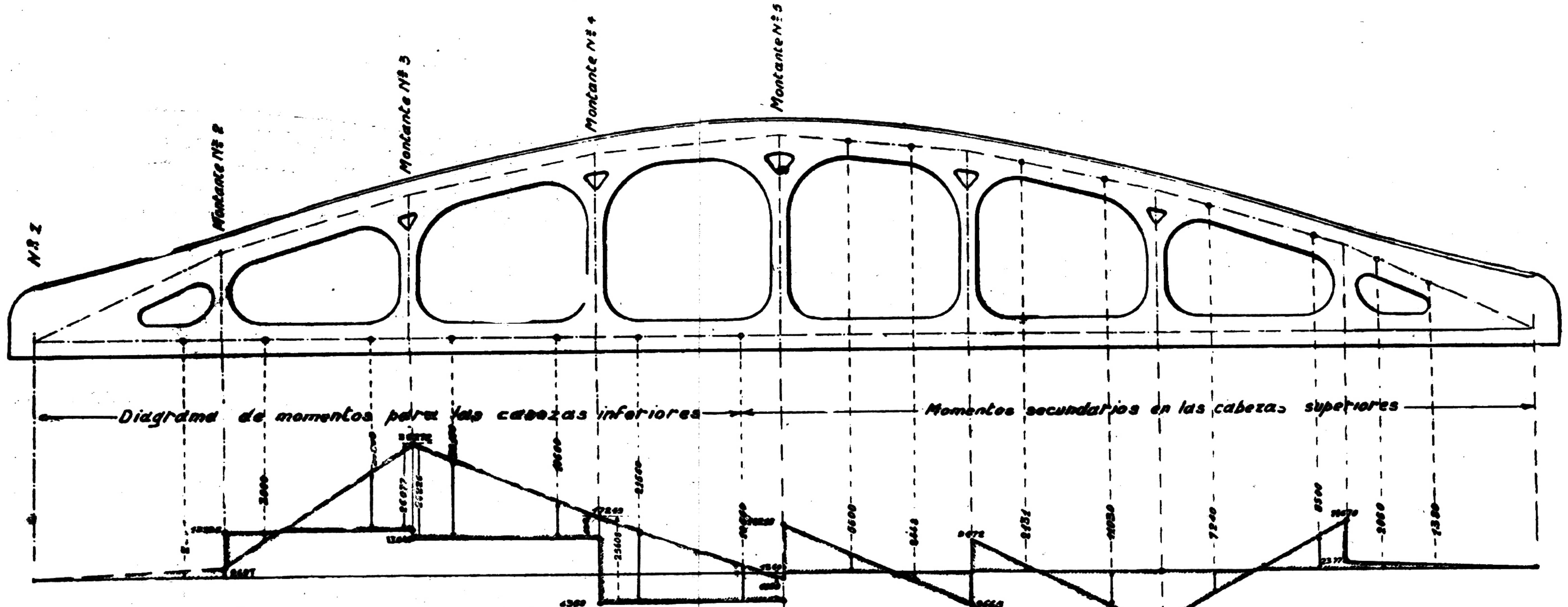
El cálculo preconizado por Vierendeel exige tiempo y cuidado por cuanto en los valores que dan π intervienen guarismos de numerosas cifras que la máquina de calcular no alcanza a dar. (En nuestro caso han intervenido cantidades con números de 15 cifras).

El cálculo aproximado, en tanto, es muy sencillo y rápido.

DIAGRAMA MOMENTOS SEGUN LA TEORIA DE VIERENDEEL

CORTE TRASVERSAL





REFERENCIAS: - - - - Diagrama de momentos de las cargas verticales
id. - - - - - horizontales
La diferencia entre ambos momentos es el valor de los momentos Flexionantes M° sobre las cabezas inferiores

NOTA: Este diagrama representa los valores M', momentos secundarios, sobre las cabezas superiores.—

ESCALA