# Estudio de un tranque en bóveda de radio variable para el embalse de las lagunas de Mondaca

POR

LUIS EYQUEM

---

(*Conclusión*)

## Verificación del tranque como muro

Sea A O B la sección transversal de una lanza de tranque de 1 m. de largo (fig. 10).

Este muro está sometido a las siguientes fuerzas:

$P$ debida al peso propio del muro.

$P_1$ debida al peso A C B de agua que gravita sobre él,

Q fracción del empuje del agua recojida por el muro.

Para poder determinar las tensiones desarrolladas en este muro en una sección cualquiera, necesitamos conocer el valor de estas tres fuerzas y su punto de aplicación.

Sea $\Omega$ la superficie A O B; $\Omega_1$ la de A C B; $\delta$ la densidad del concreto y $\delta' = 1$ la del agua, entonces

$$P = \delta\, \Omega;\ P_1 = \Omega_1$$

Vimos que la ecuación de A B es

$$y = a\,(h - x)^{n};\ d y = n\, a\,(h - x)^{n-1}$$

$$\Omega = \int_0^h y\, d x = \int_0^h a\,(h - x)^n\, d x = -\frac{a}{n+1}\Big[(h - x)^{n+1}\Big]_0^h$$

$$(6) \qquad P = \delta\,\Omega = \delta\,a\,\frac{h^{n+1}}{n+1}$$

$$P_1 = \Omega_1 = \int_0^h (h - x)\,d\,y = -\,n\,a \int_0^h (h - x)^n\,d\,x$$

$$(7) \qquad P_1 = n\,a\,\frac{h^{n+1}}{n+1}$$

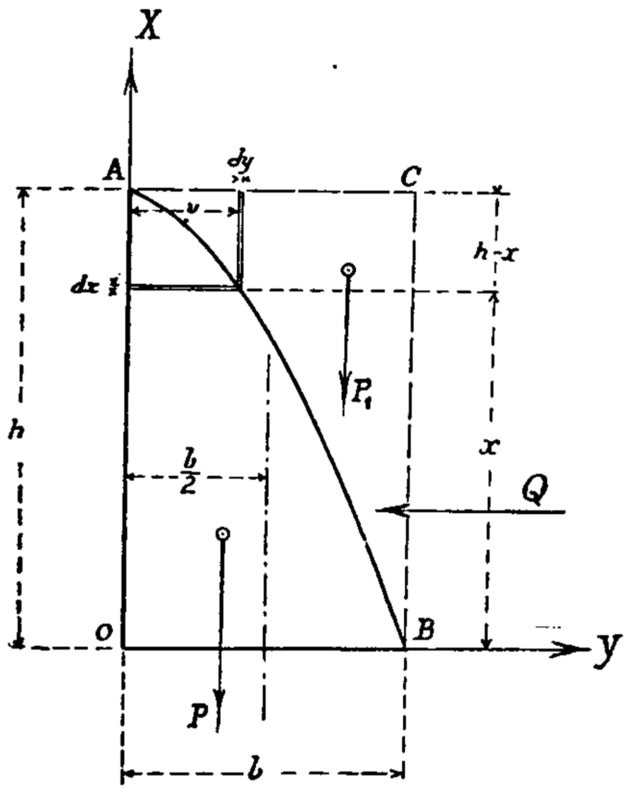


*Fig. 10*

Para determinar el valor de Q, necesitamos determinar a las distintas alturas el valor de la presión del agua resistida por el muro valiéndonos de los coeficientes *m''*. El empuje recojido por el muro a una altura x de la base, es $p_x = m_x (h - x)$.

Aplicando esta formula para las distintas alturas se tiene:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Para $x = 40$ | $p_x = 0{,}00\,(h - 40)$ | = | 0,00 |
| » $x = 35$ | $p_x = 0{,}14\,(h - 35)$ | = | 0,7 |
| » $x = 30$ | $p_x = 0{,}23\,(h - 30)$ | = | 2,3 |
| » $x = 25$ | $p_x = 0{,}31\,(h - 25)$ | = | 4,65 |
| » $x = 20$ | $p_x = 0{,}37\,(h - 20)$ | = | 7,40 |
| » $x = 15$ | $p_x = 0{,}46\,(h - 15)$ | = | 11,50 |
| » $x = 10$ | $p_x = 0{,}58\,(h - 10)$ | = | 17,30 |
| » $x = 5$ | $p_x = 0{,}70\,(h - 5)$ | = | 24,50 |
| » $x = 0$ | $p_x = 0{,}76\,(h - 0)$ | = | 30,40 |

La superficie A O B (fig. 11) representa pues la fracción de empuje recojida por el muro.

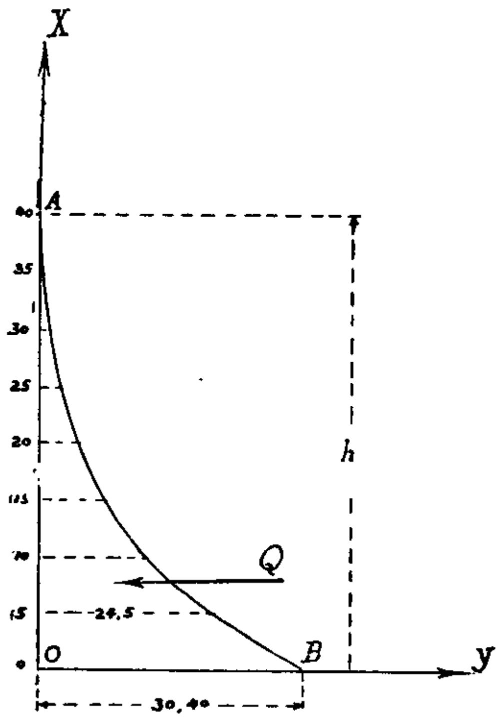


*Fig. 11*

La curva A B se puede interpretar analíticamente por una parábola de la forma:

$$y = a'\,(h - x)^{n'}$$

en la cual se determinan $a'$ y $n'$ por el sistema de la suma de los cuadros mínimos como se hizo para la curva del tranque.

Siguiendo un procedimiento análogo se obtuvo:

$$a' = 0{,}019$$

$$n' = 2$$

resultando una curva que queda muy cerca de la curva real A B.

El valor del empuje Q contrarrestado por el muro es la superficie A O B, luego:

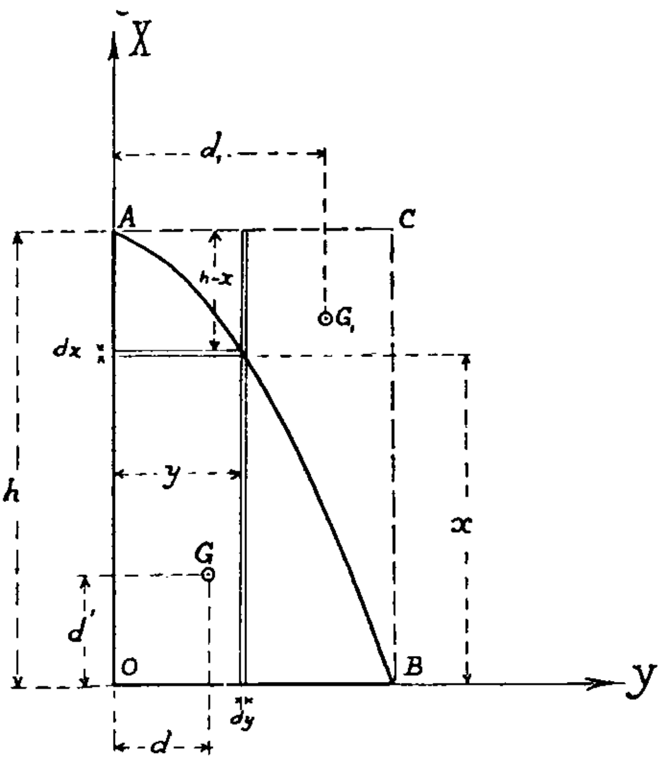


*Fig. 12.*

$$(8)\ \Sigma Q = \int_{o}^{h} y\, d\,x = \int_{o}^{h} a'\,(h - x)^{n'}\, d\,x = a'\ \frac{h^{n'+1}}{n' + 1}$$

Conocemos la intensidad de los esfuerzos que solicitan la lonja de muro estudiada; nos falta determinar el punto de aplicación de cada uno de ellos.

Para los distintos casos se reduce a determinar el centro de gravedad de un segmento de parábola de grado *n*, cuya ecuación es: $y = a\,(h - x)^n$ (fig. 12).

$$d = \frac{\int_0^h x\,y\,d\,y}{\int_0^h y\,d\,x}$$

$$d' = \frac{\int_0^h x\,y\,d\,x}{\int_0^h x\,d\,y}$$

$$d_1 = \frac{\int_0^h y\,(h - x)\,d\,y}{\int_0^h (h - x)\,d\,y}$$

$$y = a\,(h - x)^n\,;\; d\,y = -\,n\,a\,(h - x)^{n-1}$$

Reemplazando y y dy por sus valores en las expresiones de *d*, *d'* y $d_1$, resulta:

$$d = \frac{-\,n\,a\int_0^h x\,(h - x)^{2n-1}\,d\,x}{\int_0^h (h - x)^n\,d\,x}$$

$$d^1 = \frac{-\int_0^h x\,(h - x)^n\,d\,x}{n\int_0^h x\,(h - x)^{n-1}\,d\,x}$$

$$d_1 = \frac{n\,a^2 \int_0^h (h - x)^{2\,n}\, d\,x}{n\,a \int_0^h (h - x)^{n}\, d\,x}$$

Resolviendo estas integrales, se llega al siguiente resultado:

$$(9) \qquad d = \frac{(n + 1)\,a}{2\,(2\,n + 1)}\, h^n$$

$$(10) \qquad d' = \frac{h}{n + 2}$$

$$(11) \qquad d_1 = a\,\frac{n + 1}{2\,n + 1}\, h^n$$

Disponemos de todos los datos para calcular las tensiones desarrolladas en un punto cualquiera de la lonja de muro estudiada (fig. 13).

Las fuerzas verticales P y $P_1$ desarrollan una compresión según el eje del muro y los momentos M y $M_1$, debidas a la descentración del esfuerzo.

El empuje Q desarrolla un momento M'.—La expresión de estos tres momentos solicitantes es la siguiente:

$$M^1 = Q\,d$$

$$M = P\,l$$

$$M_1 = P_1\,l_1$$

Las tensiones en las fibras extremas, serán:

$$t = -\frac{P + P_1}{\Omega} \pm \frac{V}{I}\,(M + M_1 + M')$$

$$\Omega = 1\,b$$

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{6}\,b^2$$

entonces

$$(13) \quad t = -\frac{P + P_1}{b} \pm (Pl + P_1 l_1 + Qd_1)\frac{6}{b^2}$$

$$(12) \quad l = \frac{b}{2} - d \; ; \; l_1 = \frac{b}{2} - d_1 \; ; \; b = a\,h^n$$

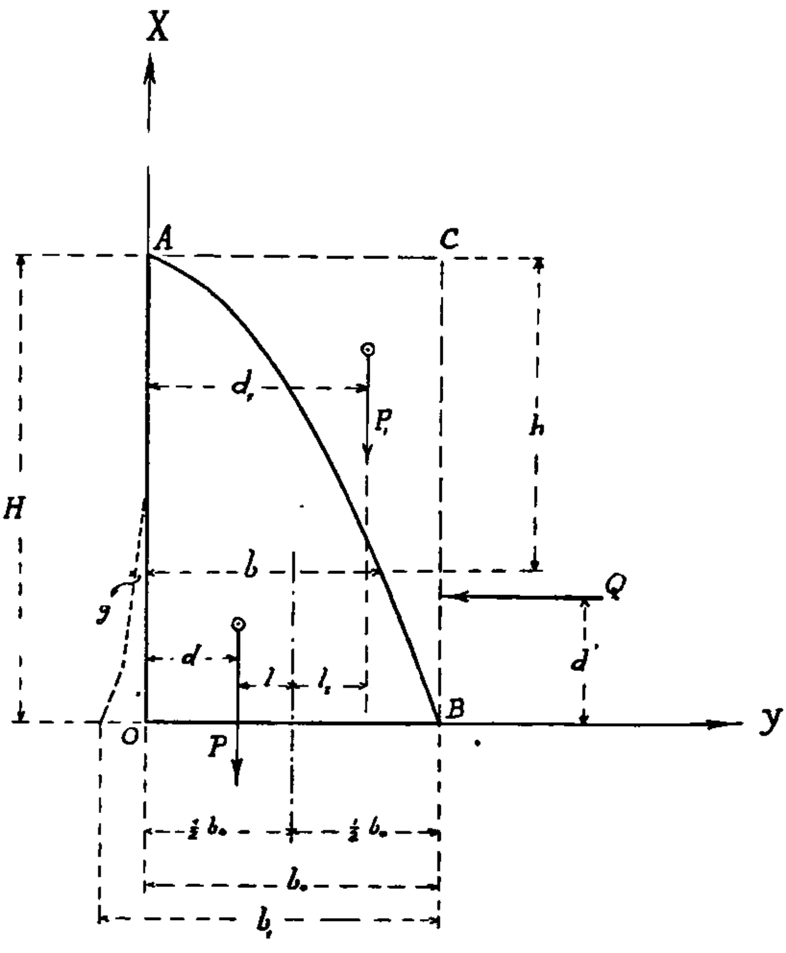


*Fig. 13*

En la base del tranque fué necesario aumentar algo el espesor para limitar los esfuerzos de tensión.

Para esta zona se tiene:

$$b_1 = b + g$$

$$12' \left\{ \begin{array}{l} l = \dfrac{b_1}{2} - d - g = \dfrac{b}{2} - d - \dfrac{g}{2} \\ l_1 = \dfrac{b_1}{2} - d_1 - g = \dfrac{b}{2} - d_1 - \dfrac{g}{2} \end{array} \right.$$

En lo que sigue se ha reemplazado en las expresiones de $b - P - P_1 - Q - l - l_1 . - d'$; los valores de $a - a' - n - n'$ por sus cantidades $a = 1.06$; $a' = 0.019$; $n = {}^2{}_3$; $n' = 2$.

$$b_1 = a\,h^n + (g) \qquad = \qquad 1{,}06 \sqrt[3]{h^2} + (g)$$

$$P = d\,a \frac{h^{n+1}}{n+1} \qquad = \qquad 1{,}59\, h \sqrt[3]{h^2}$$

$$P_1 = n\,a \frac{h^{n+1}}{n+1} \qquad = \qquad 0{,}425\, h \sqrt[3]{h^2}$$

$$Q = a' \frac{h^{n'+1}}{n'+1} \qquad = \qquad 0{,}0063\, h^3$$

$$l = \frac{B}{2} - \frac{(n+1)\,a}{2\,(2n+1)} h^n - \left(\frac{g}{2}\right) = 0{,}53 \sqrt[3]{h^2}$$

$$- 0{,}38 \sqrt[3]{h^2} - \left(\frac{g}{2}\right) = 0{,}15 \sqrt[3]{h^2} - \left(\frac{g}{2}\right)$$

$$l_1 = \frac{B}{2} - \frac{n+1}{2n+1} h^n - \left(\frac{g}{2}\right) = 0{,}53 \sqrt[3]{h^2}$$

$$- 0{,}76 \sqrt[3]{h^2} - \left(\frac{g}{2}\right) = - 0{,}23 \sqrt[3]{h^2} - \left(\frac{g}{2}\right)$$

$$d_1 = \frac{h}{n'+2} = \qquad 0{,}25\, h$$

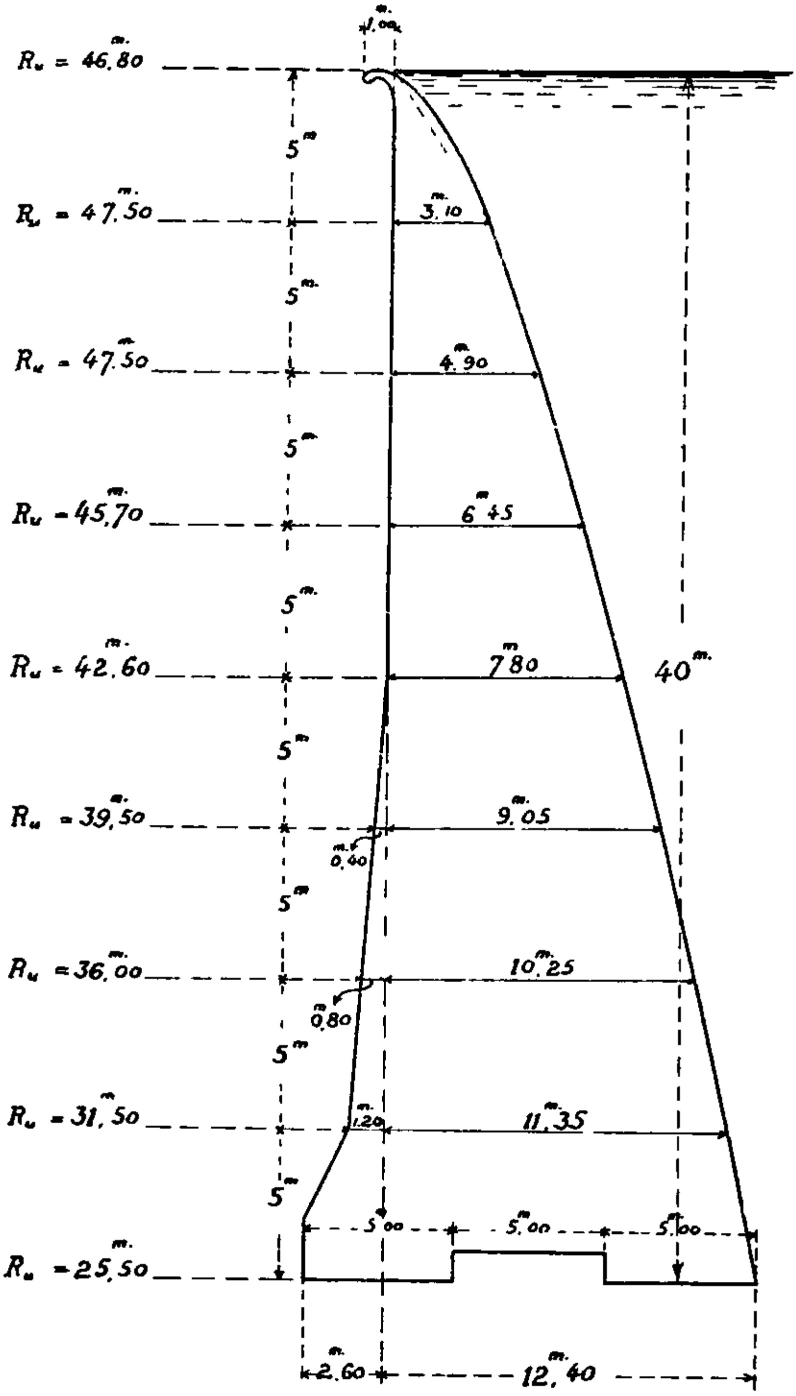
1,00
Ru = 46,80
5
Ru = 47,50
3,10
5
Ru = 47,50
4,90
5
Ru = 45,70
6,45
5
Ru = 42,60
7,80
40
5
Ru = 39,50
9,05
0,40
5
Ru = 36,00
10,25
0,80
5
Ru = 31,50
1,20
11,35
5
5,00
5,00
5,00
Ru = 25,50
2,60
12,40

Fig. 14

Haciendo variar *h* entre 0 y 40, se obtiene el siguiente cuadro para los valores anteriores:

| | | $b_1$ | P | $P_1$ | Q | l | $l_1$ | $d_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | metros | Toneladas | Toneladas | Toneladas | metros | metros | metros |
| g = 0 | Para h = 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g = 0 | Para h = 5 | 3,1 | 23,2 | 6,2 | 0,8 | 0,44 | —0,67 | 1,25 |
| g = 0 | Para h = 10 | 4,9 | 74 | 19,7 | 6,3 | 0,70 | —1,07 | 2,50 |
| g = 0 | Para h = 15 | 6,45 | 145 | 38,7 | 21,2 | 0,91 | —1,40 | 3,75 |
| g = 0 | Para h = 20 | 7,80 | 235 | 62,5 | 50 | 1,10 | —1,70 | 5,— |
| g = 0,40 | Para h = 25 | 9,45 | 340 | 91,5 | 98 | 1,08 | —2,18 | 6,25 |
| g = 0,80 | Para h = 30 | 11,05 | 460 | 123 | 170 | 1,05 | —2,62 | 7,50 |
| g = 1,20 | Para h = 35 | 12,55 | 595 | 159 | 270 | 1,00 | —3,07 | 8,75 |
| g = 2,$^m$60 | Para h = 40 | 15 | 745 | 200 | 400 | 0,45 | —4,00 | 10,— |

En este cuadro están calculados todos los factores que se necesitan para determinar las tensiones en una sección cualquiera del muro, aplicando la ecuación (13).

$$t = -\frac{P + P_1}{b_1} \pm \frac{6}{b_1^2} (P\,l + P_1\,l_1 + Q\,d_1)$$

Se fijaron las dimensiones aceptando un trabajo a la tracción hasta de 3 k por c m.²

Aplicaremos la fórmula anterior para las distintas alturas, variando de 5 en 5 metros.

La base del tranque está empotrada 4 metros en la roca, por consiguiente el empuje Q correspondiente a los 40 mts. es inferior al Q del cuadro anterior, lo mismo las tensiones que resulten.

Para h = 40 m.

$$t = -\frac{945}{15} \pm 0{,}0267 \times 3535 \begin{cases} t- = -6{,}3 - 9{,}4 = -15{,}7 \overset{k}{c}/m^2 \\ t+ = -6{,}3 + 9{,}4 = +\ 3{,}1\ c/m^2 \end{cases}$$

---

Para h = 35 m.

$$t = -\frac{754}{12.55} \pm 0{,}038 \times 2430 \begin{cases} t- = -6{,}0 - 9{,}1 = -12{,}2 \overset{k}{c}/m^2 \\ t+ = -6{,}0 + 9{,}1 = +\ 3{,}1\ c/m^2 \end{cases}$$

---

Para h = 30 m.

$$t = -\frac{583}{11{,}05} \pm 0{,}0485 \times 1430 \begin{cases} t - = -5{,}3 - 6{,}9 = -12{,}2\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -5{,}3 + 6{,}9 = +\ 1{,}6\ c/m^2 \end{cases}$$

Para h = 25 m.

$$t = -\frac{431{,}5}{9{,}45} \pm 0{,}067 \times 780 \begin{cases} t - = -4{,}6 - 5{,}2 = -9{,}8\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -4{,}6 + 5{,}2 = +\ 0{,}6\ c/m^2 \end{cases}$$

Para h = 20 m.

$$t = -\frac{297{,}5}{7{,}8} \pm 0{,}098 \times 403 \begin{cases} t - = -3{,}8 - 3{,}9 = -7{,}7\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -3{,}8 + 3{,}9 = -0{,}1\ c/m^2 \end{cases}$$

Para h = 15 m.

$$t = -\frac{183{,}7}{6{,}45} \pm 0{,}14 \times 161 \begin{cases} t - = -2{,}9 - 2{,}25 = -5{,}15\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -2{,}9 + 2{,}25 = -0{,}65\ c/m^2 \end{cases}$$

Para h = 10 m.

$$t = -\frac{93{,}7}{4{,}9} \pm 0{,}25 \times 44{,}4 \begin{cases} t - = -1{,}9 - 1{,}1 = -3{,}0\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -1{,}9 + 1{,}1 = -0{,}8\ c/m^2 \end{cases}$$

Para h = 5 m.

$$t = -\frac{29{,}4}{3{,}1} \pm 0{,}67 \times 5{,}8 \begin{cases} t - = -0{,}95 - 0{,}39 = -1{,}34\ \overset{k}{c}/m^2 \\ t + = -0{,}95 + 0{,}39 = -0{,}56\ c/m^2 \end{cases}$$