

Estabilidad sísmica de las construcciones

Anexo al informe sobre Normas de Cálculo y construcciones de obras públicas publicado en el número de Septiembre.

ESTABILIDAD SÍSMICA DE LAS CONSTRUCCIONES

NOTA.—En el presente Anexo al informe anterior, se proponen algunos ejemplos de cálculo de estabilidad de las construcciones sometidas a temblores. Expuestos estos ejemplos simples, con suficientes detalles, pueden servir de base para resolver casos más complicados; de todos modos, ellos muestran también que las escalas de intensidad de los temblores, aún las escalas absolutas como las que se indican en el informe (que definen la intensidad del sismo por el valor máximo de la aceleración de su movimiento) no bastan para determinar el efecto sobre las construcciones: influye también el desplazamiento máximo o amplitud del movimiento, presentándose todavía casos de resonancia que conducen a valores infinitos de los esfuerzos elásticos que se producen en las construcciones, hecho de suma importancia, como se comprende, y que debe evitarse cuidadosamente.

CARACTERÍSTICAS DE LOS TEMBLORES

Los temblores constituyen movimientos vibratorios del suelo. La corteza terrestre puede considerarse como un sistema de elementos materiales, cuya distribución en el estado de reposo es tal que para cada uno de estos elementos las acciones que los demás ejercen sobre él se hacen equilibrio. Cuando una parte de este sistema es sacada de aquella posición de reposo por una causa inicial, (cuya naturaleza —tectónica, volcánica u otra— no interesa en la presente cuestión) el equilibrio se rompe, pues han variado las posiciones de los elementos constitutivos del sistema. Las fuerzas que antes se anulaban, tendrán ahora una resultante que estará dirigida, para cada elemento, hacia la antigua posición, además esas fuerzas, según la Ley fundamental de Hooke a que obedece la materia sólida, deben ser proporcionales a los desplazamientos que les dieron origen, o sea que, en resumen dichas fuerzas cumplen con las dos condiciones que la Mecánica enseña que son necesarias para que las masas sobre las cuales actúan, adquieran un movimiento armónico simple.

En seguida este movimiento inicial se propaga a todas las masas adyacentes, propagación que se verifica con una velocidad que depende del módulo de elasticidad y de la densidad de la materia en que la propagación se produce. Como estas características son diferentes para los diferentes terrenos, esa velocidad es variable; además al encontrar superficies de separación entre terrenos de naturalezas diversas, deben ocurrir fenómenos de reflexión y refracción de los rayos según los cuales se propaga el movimiento sísmico.

Este fenómeno de la propagación no modifica fundamentalmente la característica del movimiento sísmico, de modo que en un punto cualquiera de la tierra él puede representarse por la ecuación de los movimientos armónicos simples que es

$$z_0 = \Delta \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$$

En esta fórmula z_0 es el desplazamiento del terreno, en un instante t cualquiera medido desde la posición primitiva de reposo, Δ es la amplitud del movimiento, o sea el mayor valor que puede tomar z_0 , y T el período de movimiento vibratorio.

Como se ve, el temblor queda definido por los valores de Δ y T , valores que se miden experimentalmente por medio de los sismógrafos. De los valores de estas características se puede también calcular la aceleración máxima g' del movimiento (valor máximo que tiene lugar en el instante en que el sentido del movimiento cambia). Derivando dos veces la ecuación (1) resulta en efecto, en valor absoluto.

$$g' = \frac{4\pi^2 \Delta}{T^2} \quad (2)$$

Se compara generalmente, como se deja constancia en el informe, esta aceleración con la de la gravedad ($g=9,81 \text{ m/seg}^2$) y el factor de relación se considera como un índice de la violencia del sismo, en las llamadas escalas absolutas.

Dos de los elementos T , Δ , g' definen por tanto, físicamente, el movimiento sísmico.

Los sismógrafos por otra parte, descomponen la amplitud Δ en tres componentes: una vertical y dos horizontales, estas últimas según dos direcciones generalmente normales (N-S y E-O, por ejemplo). Para un cálculo de estabilidad sólo interesa una descomposición en dos componentes: una vertical y otra horizontal. Esta última es la más importante; la componente vertical es generalmente menor, de modo que se hace sensible cuando la componente horizontal alcanza valores destructores.

Una última característica de los temblores es la velocidad con que se propagan. Si \underline{d} es la densidad del medio y \underline{n} el módulo de elasticidad correspondiente a la clase de vibración de que se trata, la velocidad de propagación de un movimiento vibratorio en un medio elástico vale $V = \sqrt{\frac{\underline{n}}{\underline{d}}}$. Esta fórmula es aplicable a los movimientos sísmicos: \underline{d} sería la densidad del terreno en que se propaga el temblor y \underline{n} el módulo de elasticidad. Ahora bien, la Sismología ha podido com-

probar que las vibraciones sísmicas pueden ser de varias naturalezas entre las cuales son fundamentales las vibraciones transversales (en las cuales la velocidad de las partículas es perpendicular a la velocidad de propagación) y las vibraciones longitudinales, (en que ambas velocidades tienen la misma dirección). A cada una de estas vibraciones corresponde un módulo de elasticidad diferente y por tanto una velocidad de propagación diferente. Así, la velocidad de las vibraciones transversales es alrededor de los 4.0 km|seg. y la de las vibraciones longitudinales es aproximadamente de 7.2 km|seg.

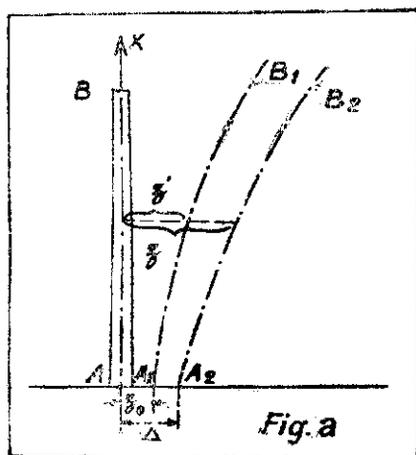
Del conocimiento de esta diferente velocidad de propagación se deduce por un cálculo muy sencillo la distancia a que se encuentra el centro de sacudimiento, origen del temblor.

Para los cálculos de estabilidad, la velocidad de propagación del temblor no interesa. En efecto, para dimensiones corrientes de las obras, el tiempo que demora una vibración del sismo para pasar de un elemento a otro de la construcción (dos muros paralelos por ejemplo) es tan pequeño, que es aproximación suficiente suponerlo nulo y aceptar por tanto la concordancia de fase del movimiento de todos los elementos de una construcción.

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE ESTABILIDAD

CASO I.—Pieza empotrada en la fundación, libre en el extremo, sometida al efecto de la masa propia

En este caso están los muros de circunvalación, las chimeneas, los tranques, etc.



a) Pieza prismática.

Sean: Fig. a.

H la altura de la pieza

ω , la sección transversal

I el momento de inercia de la sección transversal, respecto de un eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al plano en que se verifica el movimiento sísmico.

ρ la densidad del material

E el módulo de Young del material.

Consideraremos el caso del movimiento *horizontal* del suelo, caracterizado como se ha dicho por una ecuación tal como

$$z_0 = \Delta \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$$

en la cual Δ es la amplitud de la oscilación sísmica y T el período.

La aceleración máxima g' del movimiento oscilatorio sería

$$g' = \frac{4\pi^2 \Delta}{T^2}$$

La pieza A B cuando es sacada de su posición de equilibrio y luego dejada en libertad de moverse, ejecuta vibraciones de períodos propios $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ vibraciones libres que dependen de sus dimensiones geométricas y de las características elásticas del material de que está hecha. En general, τ (período del movimiento sísmico) será distinto de T .

Las vibraciones libres de la pieza son amortiguadas; las vibraciones sísmicas del suelo, durante un tiempo más o menos largo pueden considerarse sin amortiguamiento. De aquí resulta que la vibración de la pieza al cabo de corto tiempo se verificará no con alguno de sus períodos propios sino con el período T de la vibración del suelo (vibración forzada). La vibración forzada tendrá el mismo período que la vibración en el caso de resonancia, o sea cuando T sea un múltiplo entero de τ .

Por último se supondrá que durante la vibración forzada, todos los elementos de la pieza vibran en concordancia de fase (vibración normal).

Sea entonces A_2, B_2 la posición extrema de la pieza (instante $\frac{T}{2}$) y A_1, B_1 una posición cualquiera (instante t). Si z es el desplazamiento máximo y z' el desplazamiento cualquiera, se tendrá

$$z' = z \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \quad (3)$$

Cuando la pieza está en A_1, B_1 las únicas fuerzas que actúan sobre ella son las reacciones de inercia. (Se supone que el desplome es suficientemente pequeño para poder despreciar el momento del peso propio). La ecuación diferencial de la elástica es entonces

$$EI \frac{\delta^4 z'}{\delta x^4} + \rho \omega \frac{\delta^2 z'}{\delta t^2} = 0 \quad (4)$$

Pero de la ecuación (3) se saca

$$\frac{\delta^4 z'}{\delta x^4} = \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \frac{\delta^4 z}{\delta x^4}; \quad \frac{\delta^2 z'}{\delta t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} z \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$$

valores que reemplazados en (4) dan

$$EI \frac{\delta^4 z}{\delta x^4} - \frac{4 \pi^2 \rho \omega}{T^2} z = 0$$

que será la ecuación diferencial de la elástica extrema $A_2 B_2$.

Si se hace

$$\frac{4 \pi^2 \rho \omega}{EI T^2} = R^4 \quad (5)$$

la ecuación diferencial queda

$$\frac{\delta^4 z}{\delta x^4} - R^4 z = 0$$

que tiene como solución general

$$z = A e^{Rx} + B e^{-Rx} + C \cos Rx + D \sin Rx \quad (6)$$

Para determinar las cuatro constantes de integración A, B, C, D, se introducen las condiciones en los límites, que son las siguientes: en el empotramiento ($x = 0$) se debe tener

$$z = \Delta$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 0 \text{ (tangente vertical, que es la condición de empotramiento)}$$

En el extremo libre ($x = H$) debe tener

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \text{ (no hay momento solicitante)}$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = 0 \text{ (no hay esfuerzo de corte).}$$

Los valores de las derivadas sucesivas son

$$\frac{dz}{dx} = R (A e^{Rx} - B e^{-Rx} - C \sin Rx + D \cos Rx) \quad (7)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = R^2 (A e^{Rx} + B e^{-Rx} - C \cos Rx - D \sin Rx) \quad (8)$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = R^3 (A e^{Rx} - B e^{-Rx} + C \sin Rx - D \cos Rx) \quad (9)$$

Luego las ecuaciones que determinan A, B, C, D, son

$$A + B + C = \Delta \tag{10}$$

$$A - B + D = 0 \tag{11}$$

$$Ae^{RH} + Be^{-RH} - C \cos RH - D \sin RH = 0 \tag{12}$$

$$Ae^{RH} + Be^{-RH} + C \sin RH - D \cos RH = 0 \tag{13}$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones se las puede reemplazar por las dos siguientes, que tienen dos de las incógnitas explícitas

$$C = Ae^{RH} (\cos RH - \sin RH) + Be^{-RH} (\cos RH + \sin RH) \tag{14}$$

$$D = Ae^{RH} (\sin RH + \cos RH) + Be^{-RH} (\sin RH - \cos RH) \tag{15}$$

Las ecuaciones (5) (8) (9) (10) (11) (14) y (15) resuelven totalmente el problema de la sollicitación de la pieza. En efecto, conocido el período T del movimiento sísmico, la ecuación (5) permite calcular R. Las ecuaciones (10) (11) (14) y (15) dan entonces los valores de A, B, C y D, con los cuales la ecuación (6) da la elástica, la (8) los valores de $\frac{d^2z}{dx^2}$ y la (9) los de $\frac{d^3z}{dx^3}$. Si se multiplica $\frac{d^2z}{dx^2}$ por E I se tendrá el momento de flexión y si se multiplica $\frac{d^3z}{dx^3}$ por E I se tendrá el esfuerzo de corte

Valor de R.—Como se dijo, R depende según (5) del período de la vibración. Cuando la pieza oscila libremente, R debe satisfacer a la ecuación (que se deduce de las anteriores haciendo en ellas $\Delta = 0$),

$$2 + e^{RH} \cos RH + e^{-RH} \cos RH = 0$$

que se satisface con los valores

$$R_1 H = 0,5969 \pi \dots$$

$$R_2 H = 1,4942 \pi \dots$$

$$R_3 H = 2,5003 \pi \dots$$

.....

o en general con un valor

$$RH = \varepsilon \pi$$

Llevando este valor en (5) se tendrá (se trata de vibraciones libres y por tanto se debe reemplazar T por τ)

$$\sqrt{\frac{4\pi^2 \rho \omega}{EI \tau^2}} H = \varepsilon \pi$$

de donde

$$\tau = \frac{2H^2}{\varepsilon^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

Luego los períodos propios de oscilación de la pieza son

$$\tau_1 = \frac{2H^2}{(0,5969)^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

$$\tau_2 = \frac{2H^2}{(1,4942)^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

$$\tau_3 = \frac{2H^2}{(2,5003)^2 \pi} \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

.....

etc.

Si el sismo posee cualquiera de estos períodos, las cuatro constantes toman el valor infinito, lo que indica que cuando se produce la resonancia las deformaciones crecen indefinidamente. La vida de la pieza depende aquí solamente de que el sismo sea suficientemente corto para que no se alcance la ruptura.

Cuando no hay resonancia, o sea cuando RH tiene valores distintos de $0,5969\pi$, $1,4942\pi$, $2,5003\pi$, etc., la elástica que se produce depende del valor de RH o sea del período T del sismo. A cada período, por tanto, corresponderá una distinta repartición de los momentos y esfuerzos de corte.

Aplicación numérica.—Sea el caso de un muro de concreto ($\rho g = 2400 \text{ K/m}^3$; $E = 1,5 \times 10^5 \text{ Kg/m}^2$) de espesor $e = 0,50 \text{ m}$, sometido a un sismo cuyas vibraciones, que se realizan en el sentido del espesor, están caracterizadas por una amplitud $\Delta = 0^0,025 \text{ m}$. y una aceleración $g' = \frac{1}{5} g = 1,962 \text{ m/seg}^2$

lo que corresponde a un período $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{g'}} = 0,224 \text{ seg}$.

Se calcula R por la fórmula (5)

$$R = \sqrt[4]{\frac{4\pi^2 \omega \rho}{EI T^2}}$$

Aquí $T^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta}{g'}$ y como $g' = \frac{1}{5} g$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{5\Delta}{g}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 1e \\ I = \frac{1}{12} 1e^3 \end{array} \right\} \text{luego } \frac{\omega}{I} = \frac{12}{e^2}$$

Luego

$$R = \sqrt[4]{\frac{12 \rho g}{5 E \Delta e^2}} = 0,280$$

Estudiaremos tres casos.

1er. caso.

$$\begin{aligned} H &= 5 \text{ m.} & \text{Entonces } RH &= 1,400 = 80^\circ 13' \\ e^{RH} &= 4,0552 & \cos RH &= +0,1699 \\ e^{-RH} &= 0,2466 & \text{sen } RH &= +0,9855 \end{aligned}$$

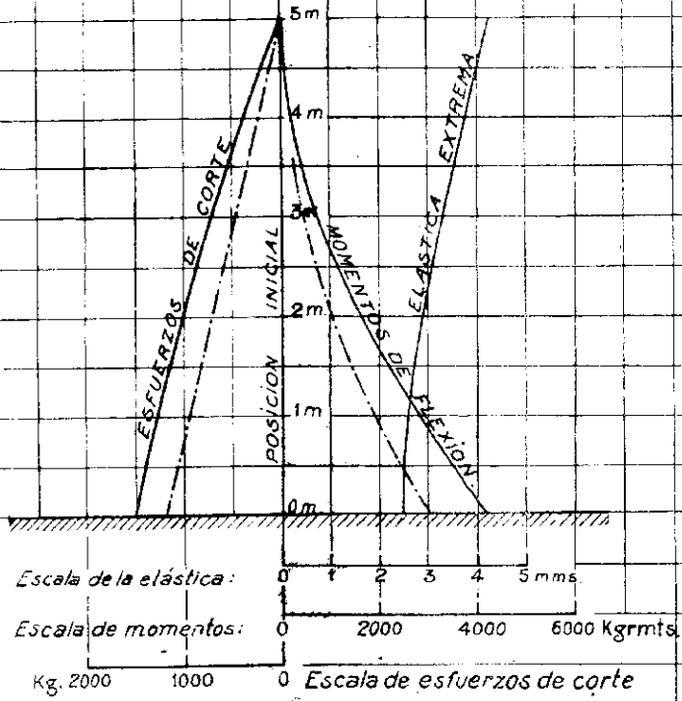
Introduciendo estos valores en las ecuaciones (10) (11) (14) y (15) se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{A}{\Delta} &= 0,1463 & \frac{B}{\Delta} &= 1,0411 \\ \frac{C}{\Delta} &= -0,1874 & \frac{D}{\Delta} &= 0,8948 \end{aligned}$$

Con estos valores se han calculado para diez secciones de la pieza los valores de $\frac{z}{\Delta}$ (que dan la elástica), los de $\frac{d^2 z}{dx^2} / R^2 \Delta$ (que son proporcionales a los momentos) y los de $\frac{d^3 z}{dx^3} / R^3 \Delta$ (que son proporcionales a los esfuerzos de corte).

| X | Rx | Rx grados | e ^{.RX} | e ^{-.RX} | cos Rx | sen Rx | $\frac{z}{\Delta}$ | $\frac{d^2 z}{dx^2}$ R2 Δ | $\frac{d^3 z}{dx^3}$ R3 Δ |
|------------|-------|--------------|------------------|-------------------|--------|--------|--------------------|------------------------------|------------------------------|
| 0 | 0° | 0° | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | 1,000 | 1,375 | -1,790 |
| 0,1 H..... | 0,140 | 8°01' | 1,150 | 0,870 | 0,990 | 0,139 | 1,013 | 1,137 | -1,649 |
| 0,2 H..... | 0,280 | 16°03' | 1,323 | 0,755 | 0,961 | 0,276 | 1,048 | 0,914 | -1,505 |
| 0,3 H..... | 0,420 | 24°04' | 1,522 | 0,657 | 0,913 | 0,408 | 1,102 | 0,714 | -1,357 |
| 0,4 H..... | 0,560 | 32°05' | 1,751 | 0,571 | 0,847 | 0,531 | 1,169 | 0,533 | -1,196 |
| 0,5 H..... | 0,700 | 40°06' | 2,014 | 0,497 | 0,765 | 0,644 | 1,246 | 0,380 | -1,027 |
| 0,6 H..... | 0,840 | 48°08' | 2,316 | 0,432 | 0,667 | 0,745 | 1,331 | 0,247 | -0,847 |
| 0,7 H..... | 0,980 | 56°09' | 2,664 | 0,375 | 0,557 | 0,831 | 1,425 | 0,141 | -0,654 |
| 0,8 H..... | 1,120 | 64°10' | 3,065 | 0,327 | 0,436 | 0,900 | 1,514 | 0,066 | -0,451 |
| 0,9 H..... | 1,260 | 72°12' | 3,525 | 0,284 | 0,306 | 0,952 | 1,608 | 0,016 | -0,232 |
| H..... | 1,400 | 80°13' | 4,055 | 0,247 | 0,170 | 0,985 | 1,700 | 0,000 | -0,000 |

1ER CASO
H = 5 metros



Nota. Las curvas de punto y raya corresponden a la asimilación del temblor con un viento horizontal de intensidad correspondiente a la aceleración máxima del sisma

Fig. N° 1

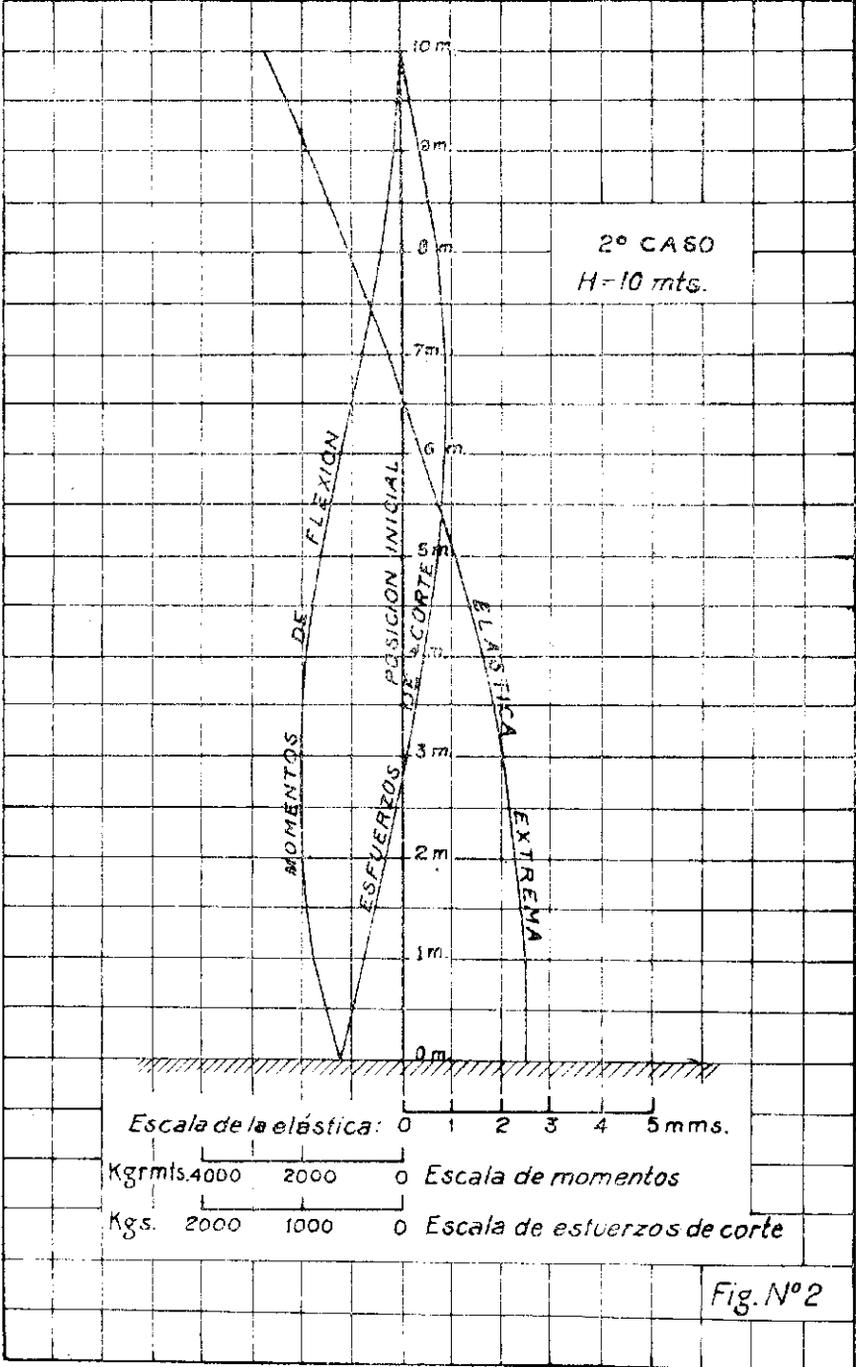


Fig. N° 2

En la figura 1 se han dibujado a escalas relativas, con los datos que da la tabla anterior, la elástica, la curva de momentos de flexión y la curva de esfuerzos de corte de la pieza. Se ve que la sección extrema de la pieza se mueve en el mismo sentido que la sección de empotramiento y que los valores máximos de los momentos y esfuerzos de corte ocurren en el empotramiento.

Si para esta pieza ($H = 5$ m.) se calcula τ_1 , se encuentra $\tau_1 = 0,132$ seg., lo que indica que T es superior al mayor período de resonancia.

2.º caso

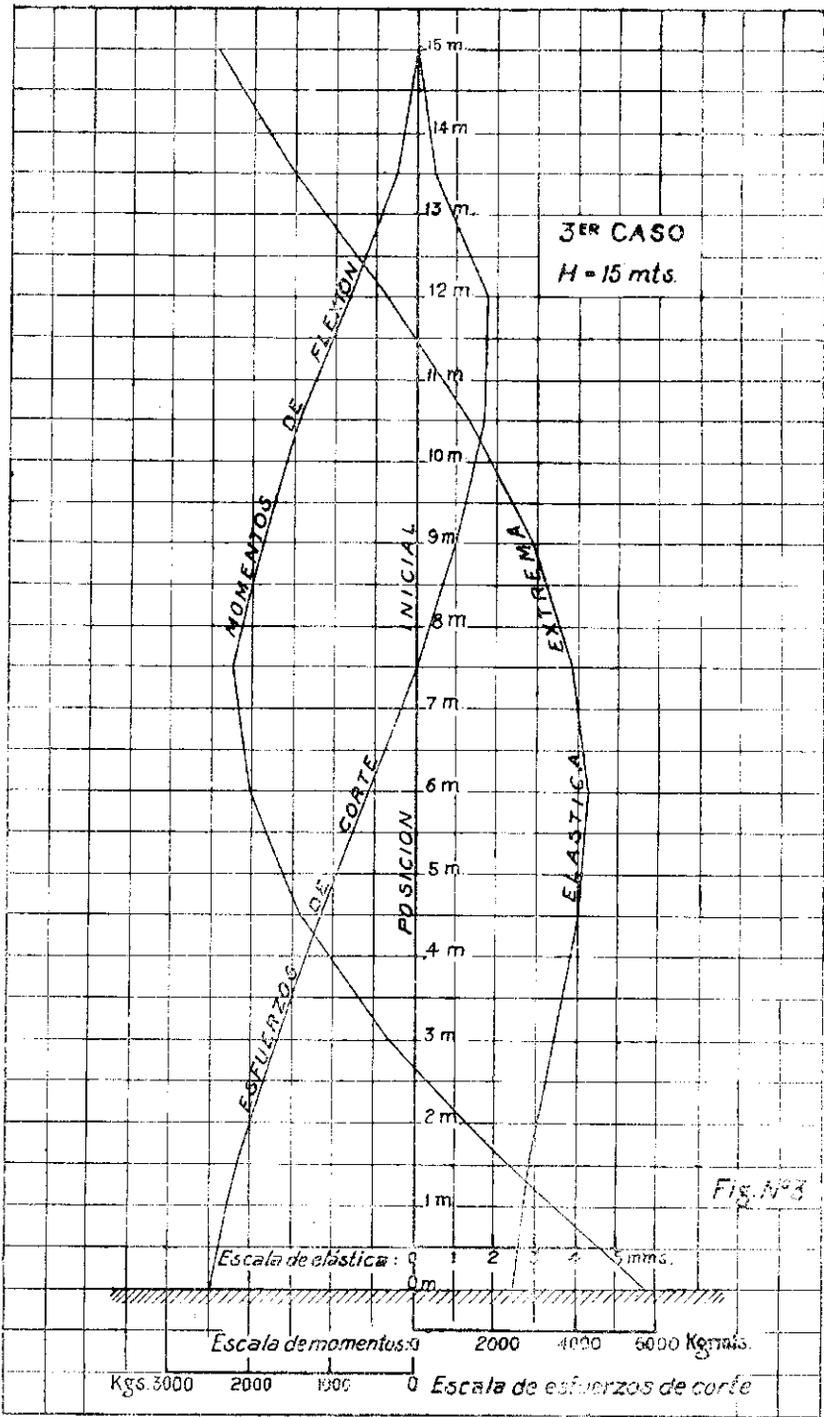
$$\begin{aligned} H^1 &= 10 \text{ metros} \\ RH &= 2,800 = 160^\circ 26' \\ e^{RH} &= 16,444 & \cos RH &= -0,9422 \\ e^{-RH} &= 0,061 & \text{sen } RH &= +0,3349 \end{aligned}$$

Con estos valores se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{A}{\Delta} &= -0,0341 & \frac{B}{A} &= +0,3316 \\ \frac{C}{A} &= +0,7023 & \frac{D}{\Delta} &= +0,3654 \end{aligned}$$

con los cuales se ha calculado la tabla que sigue:

| x | Rx | Rx grados | e^{Rx} | e^{-Rx} | $\cos Rx$ | $\text{sen } Rx$ | z Δ | $\frac{d^2z}{dx^2}$ R2 Δ | $\frac{d^3z}{dx^3}$ R3 Δ |
|------------|-------|--------------|----------|-----------|-----------|------------------|---------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 0° | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | 1,000 | -0,405 | -0,731 |
| 0,1 H..... | 0,280 | 16°03' | 1,323 | 0,755 | 0,961 | 0,276 | 0,978 | -0,568 | -0,452 |
| 0,2 H..... | 0,560 | 32°05' | 1,751 | 0,571 | 0,847 | 0,531 | 0,917 | -0,659 | -0,187 |
| 0,3 H..... | 0,840 | 48°08' | 2,316 | 0,432 | 0,667 | 0,745 | 0,809 | -0,671 | +0,064 |
| 0,4 H..... | 1,120 | 64°10' | 3,065 | 0,327 | 0,436 | 0,900 | 0,639 | -0,631 | +0,259 |
| 0,5 H..... | 1,400 | 80°13' | 4,055 | 0,247 | 0,170 | 0,985 | 0,423 | -0,536 | +0,410 |
| 0,6 H..... | 1,680 | 96°16' | 5,365 | 0,186 | -0,109 | 0,994 | 0,166 | -0,408 | 0,494 |
| 0,7 H..... | 1,960 | 112°18' | 7,099 | 0,141 | -0,379 | 0,925 | -0,123 | -0,267 | 0,505 |
| 0,8 H..... | 2,24 | 128°21' | 9,393 | 0,106 | -0,620 | 0,784 | -0,434 | -0,138 | 0,421 |
| 0,9 H..... | 2,52 | 144°23' | 12,428 | 0,080 | -0,813 | 0,582 | -0,754 | -0,040 | 0,247 |
| H..... | 2,80 | 160°26' | 16,544 | 0,061 | -0,942 | 0,335 | -1,100 | 0,000 | 0,000 |



Para esta pieza ($H = 10$ m.) se encuentra

$$\tau_1 = 0,528 \text{ seg.}$$

$$\tau_2 = 0,084 \text{ seg.}$$

lo que indica que T está comprendido entre el primero y el segundo período de resonancia. Nótese que a esta circunstancia corresponde una inversión de la elástica, puesto que a un desplazamiento hacia la derecha de la sección de empotramiento corresponde un desplazamiento hacia la izquierda de la sección extrema. Además, ahora hay máximos de los momentos y esfuerzos de corte en secciones distintas de la de empotramiento (figura 2).

3.^{er} caso

$$H = 15 \text{ metros}$$

$$RH = 4,200 = 240^\circ 38'$$

$$e^{RH} = 66,683$$

$$e^{-RH} = 0,015$$

$$\cos RH = -0,4904$$

$$\sin RH = -0,8715$$

valores con los cuales resulta

$$\frac{A}{\Delta} = -0,0164$$

$$\frac{B}{\Delta} = +1,4623$$

$$\frac{C}{\Delta} = -0,4459$$

$$\frac{D}{\Delta} = +1,4787$$

De aquí se ha deducido la siguiente tabla

| x | Rx | Rx grados | e^{Rx} | e^{-Rx} | cos Rx | sen Rx | $\frac{z}{\Delta}$ | $\frac{d2z}{dx2}$ R2Δ | $\frac{d3z}{dx3}$ R3Δ |
|------------|-------|--------------|----------|-----------|--------|--------|--------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0° | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,000 | 1,000 | 1,892 | 2,957 |
| 0,1 H..... | 0,420 | 24°04' | 1,522 | 0,657 | 0,913 | 0,408 | 1,134 | 0,738 | -2,522 |
| 0,2 H..... | 0,840 | 48°08' | 2,316 | 0,432 | 0,667 | 0,745 | 1,399 | -0,207 | -1,990 |
| 0,3 H..... | 1,260 | 72°12' | 3,525 | 0,284 | 0,306 | 0,952 | 1,628 | -0,914 | -1,351 |
| 0,4 H..... | 1,680 | 96°16' | 5,365 | 0,186 | -0,109 | 0,994 | 1,705 | -1,337 | -0,643 |
| 0,5 H..... | 2,100 | 120°19' | 8,166 | 0,122 | -0,505 | 0,863 | 1,531 | -1,475 | 0,034 |
| 0,6 H..... | 2,520 | 144°23' | 12,428 | 0,080 | -0,813 | 0,582 | 1,135 | -1,249 | 0,551 |
| 0,7 H..... | 2,940 | 168°27' | 18,915 | 0,053 | -0,980 | 0,200 | 0,500 | -0,966 | 0,972 |
| 0,8 H..... | 3,360 | 192°30' | 28,788 | 0,035 | -0,976 | -0,216 | -0,307 | -0,537 | 1,012 |
| 0,9 H..... | 3,780 | 216°34' | 43,814 | 0,023 | -0,803 | -0,596 | -1,214 | 0,158 | 0,238 |
| H..... | 4,200 | 240°38' | 66,683 | 0,015 | -0,490 | -0,871 | 1,938 | 0,000 | 0,000 |

con cuyos valores se han dibujado en la figura 3 la elástica, la curva de momentos y la curva de esfuerzos de corte de la pieza.

En este caso se observa también la inversión de la elástica, pero esta inversión es más compleja que la del caso 2, pues parte de la pieza se mueve relativamente en el mismo sentido que la sección de empotramiento y parte en sentido contrario.

Hay así un punto de inflexión de la elástica, que corresponde a un momento de flexión nulo. Los momentos son de dos signos y lo propio ocurre con los esfuerzos de corte, presentándose fuera de los valores máximos de la sección de empotramiento, otros máximos a mayor altura relativa que en el caso 2.

Como se ve, un mismo sismo produce efectos muy diversos según sea la altura de la pieza. Recíprocamente, sobre una misma pieza los efectos variarán grandemente con el período del sismo, aún cuando sea el mismo el valor de la aceleración máxima, lo que indica que no basta este coeficiente sísmico para caracterizar la violencia de un temblor.

El momento máximo ocurre para el primer caso en el empotramiento y vale

$$m_{\max} = 1,3748 R^2 \Delta E I$$

$$E = 1,5 \times 10^5$$

$$I = \frac{1}{12} (0,5)^3 \text{ por. m. l. de muro}$$

$$R = 0,28$$

$$\Delta = 0,0025$$

con lo cual

$$m_{\max} = 4210 \text{ Kgr mtrs.}$$

El esfuerzo de corte máximo ocurre también en el empotramiento y vale

$$\begin{aligned} F_{\max} &= E I 1,7896 R^3 \Delta \\ &= 1536 \text{ Kgr.} \end{aligned}$$

Si se asimilase la sollicitación de la pieza al de una carga uniformemente repartida horizontal correspondiente a la aceleración g' del sismo, el momento máximo ocurriría también en el empotramiento y valdría

$$m_{\max} = \frac{1}{12} p H^2$$

siendo

$$p = 0,5 \times 480 = 240, \text{ y } H = 5$$

con lo cual

$$m_{\max} = 3000 \text{ Kgrmts.}$$

y el esfuerzo de corte máximo sería

$$F_{\max} = p H = 1200 \text{ Kg.}$$

La sollicitación efectiva, como se ve, es 40% mayor para los momentos y 28% para los esfuerzos de corte. Pero, en general, la forma de las curvas de momentos y de esfuerzos de corte es asimilable a aquella sollicitación.

En los casos 2 y 3 los momentos y esfuerzos de corte en el empotramiento son relativamente inferiores (porque son casos que han resultado alejados de la resonancia); pero es notable el hecho de que otros máximos de estos elementos ocurren en secciones situadas a diversas alturas. Todo esto muestra que se puede cometer grave error al asimilar el efecto del temblor a una especie de viento horizontal.

Momento máximo.—El momento máximo ocurre para

$$\frac{\delta \left(\frac{\delta^3 z}{dx^2} \right)}{\delta x} = 0 \text{ al mismo tiempo que para } \frac{\delta \left(\frac{\delta^2 z}{dx^2} \right)}{\delta R} = 0$$

La primera condición, correspondiente al caso en que R es dato del problema, conduce a la ecuación

$$A e^{Rx} - B e^{-Rx} + C \operatorname{sen} Rx - D \operatorname{cos} Rx = 0 \quad (16)$$

que se satisface para cierto valor $Rx = E$

de donde se puede determinar x, o sea en qué sección se produce el momento máximo para un valor dado de R (o sea de T).

Por ejemplo, si se trata de determinar la condición para que el momento máximo se produzca en la sección de empotramiento ($x = 0$) la ecuación (16) conduce a la relación

$$A - B - D = 0$$

la que combinada con la ecuación (11) da

$$D = 0$$

o sea

$$e^{-RH} \operatorname{sen} RH - e^{-RH} \operatorname{cos} RH + e^{RH} \operatorname{sen} RH + e^{RH} \operatorname{cos} RH = 0$$

ecuación que transformada se puede escribir

$$\operatorname{tang} RH = \frac{1 - e^{2RH}}{e^{2RH} + 1}$$

Esta ecuación se satisface con el valor

$$RH = 2,3652$$

lo que para el temblor considerado en los ejemplos numéricos propuestos, conduce al valor

$$H = 8,45 \text{ mts.}$$

o bien, para el primer caso de un muro de altura $H = 5$ metros exige un temblor de período $T = 0,175$ seg.

b) *Pieza no prismática*

Cuando la pieza no es prismática, o sea cuando I y ω varían con x resultará

$$R^4 = f(x)$$

y por tanto la ecuación diferencial por integrar sería

$$\frac{\delta^4 z}{\delta x^4} - f(x)z = 0$$

integral que también puede hacerse.

Pero en muchas construcciones será más frecuente el caso que I y ω varían por trozos (por ejemplo en los edificios en correspondencia con los diferentes pisos).

Sea, por ejemplo, una pieza compuesta de tres trozos, caracterizado cada uno por los valores de I y ω y por tanto por los valores de R .

Al integrar la ecuación diferencial de la elástica para cada trozo, aparecerán ahora en total 12 constantes por determinar:

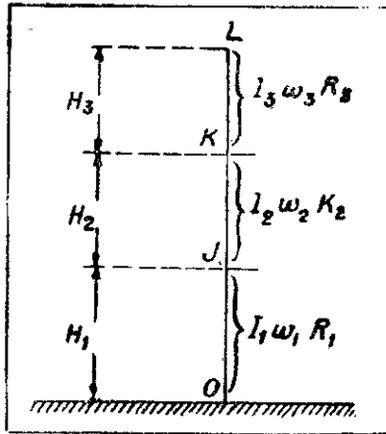
- A_1, B_1, C_1, D_1 para el trozo $0 J$
- A_2, B_2, C_2, D_2 para el trozo $J K$
- A_3, B_3, C_3, D_3 para el trozo $K L$

para lo cual se dispone también de 12 ecuaciones, que son:

en el empotramiento 0:

para $x = 0$ debe ser $(z)_1 = 0$ y $\left(\frac{dz}{dx}\right)_1 = 0$, en donde el índice 1 indica que se trata de la elástica del trozo $0 J$ caracterizada por A_1, B_1, C_1, D_1 . Total dos ecuaciones en 0.

en la sección J



para $x = H_1$ se debe tener

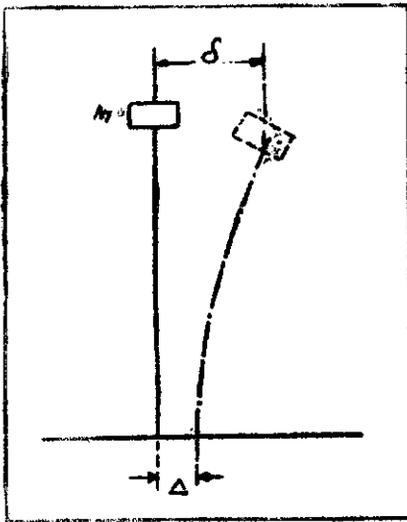
$$\begin{aligned} (3)_1 &= (z)_2 \\ \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_1 &= \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_2 \\ \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)_1 &= \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)_2 \\ \left(\frac{\delta^3 z}{\delta x^3}\right)_1 &= \left(\frac{\delta^3 z}{\delta x^3}\right)_2 \end{aligned}$$

en donde el índice 1 indica que se trata de la elástica del trozo 0 J y el índice 2 que se trata de la elástica J K.

Total 4 ecuaciones en J.

Del mismo modo se tendrán 4 ecuaciones en K y 2 ecuaciones $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right) = 0$ y $\left(\frac{\delta^3 z}{\delta x^3}\right) = 0$ para $x = H_1 + H_2 + H_3$ en el extremo L. En resumen, hay 12 ecuaciones para determinar las 12 constantes. El problema no es más difícil, aún cuando los cálculos resulten más engorrosos.

Caso 2.—Pieza empotrada en la fundación, libre en el extremo, que soporta una masa M colocada en el extremo libre y en que es despreciable la masa propia de la pieza ($\rho = 0$).—La ecuación diferencial de la elástica es ahora



$$EI \frac{\delta^4 z}{\delta x^4} = 0$$

Integrando una vez se obtiene

$$EI \frac{\delta^3 z}{\delta x^3} = A = M \left(\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} \right)_{x=H}$$

Pero en cualquier sección se tiene

$$z = z_{\max} \sin 2\pi \frac{\sigma}{T}$$

de donde

$$\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} z$$

Luego la ecuación de la tercera derivada es

$$EI \frac{\delta^3 z}{\delta x^3} = -\frac{4\pi^2 M \delta}{T^2}$$

Integrando una segunda vez resulta

$$E I \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{4 \pi^2 M \delta}{T^2} x + B$$

Pero para $x = H$ es $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 0$ luego $B = \frac{4 \pi^2 M \delta}{T^2} H$

y por tanto $E I \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{4 \pi^2 M \delta}{T^2} (H-x)$

Integrando nuevamente

$$E I \frac{\delta z}{\delta x} = - \frac{2 \pi^2 M \delta}{T^2} (H-x)^2 + C$$

Pero para $x = 0$ es $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, luego $C = \frac{2 \pi^2 M \delta}{T^2} H^2$

con lo cual $E I \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{2 \pi^2 M \delta}{T^2} (2Hx - x^2)$

Integrando una última vez:

$$E I z = \frac{2 \pi^2 M \delta}{T^2} \left(Hx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + D$$

Si en la ecuación anterior se pone la condición para $x = 0$, $z = 0$, lo que expresaría que no hay sismo, la ecuación representará la vibración libre de la pieza. Se tiene entonces $D = 0$ y por tanto

$$E I z = \frac{2 \pi^2 M \delta}{T^2} \left(Hx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

y haciendo aquí $x = H$ se debe tener $z = \delta$. Luego

$$E I = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 M H^3}{T^2}$$

ecuación que da el período de vibración propia:

$$\tau = 2 \pi \sqrt{\frac{M H^3}{3 E I}}$$

Poniendo la condición que para $x = 0$ es $z = \Delta$, se obtiene $D = E I \Delta$

Luego
$$EIz = EI\Delta + \frac{2\pi^2 M \delta}{T^2} \left(Hx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

Haciendo aquí $x = H$ se debe tener $z = \delta$, luego

$$EI\delta = EI\Delta + \frac{4\pi^2 M \delta H^3}{3T^2}$$

de donde
$$\delta = \frac{EI\Delta}{\left(EI - \frac{4\pi^2 M H^3}{3T^2} \right)}$$

con lo cual la ecuación de la elástica queda

$$\frac{z}{\Delta} = 1 + \frac{2\pi^2 M}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3} \left(Hx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (17)$$

Nótese que para $T = \tau$ resulta $z =$ infinito, o sea que habiendo resonancia, la deformación de la pieza crece indefinidamente.

Derivando la ecuación (1) se encuentra

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{2\pi^2 M}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3} (2Hx - x^2)$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{4\pi^2 M}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3} (H - x); \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\delta^3 z}{\delta x^3} = \frac{4\pi^2 M}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3}$$

Entonces el momento de flexión valdrá

$$m = EI \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{4\pi^2 M EI \Delta}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3} (H - x) \quad (18)$$

El mayor momento ocurrirá siempre en el empotramiento y valdrá

$$m_{\max} = \frac{\pi^2 M EI \Delta H}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3}$$

El esfuerzo de corte es constante y vale

$$F = EI \frac{\delta^3 z}{\delta x^3} = \frac{4\pi^2 M EI \Delta}{T^2 EI - \frac{4}{3}\pi^2 M H^3} \quad (19)$$

Si se asimilase la sollicitación al de una pieza sometida a una fuerza horizontal extrema de valor $P = M g'$, el momento máximo valdría

Pero
$$m_{\max} = PH = Mg'H$$

$$g' = \frac{4\pi^2 \Delta}{T^2}$$

Luego sería
$$m_{\max} = \frac{4\pi^2 M \Delta H}{T^2}$$

El verdadero valor es

$$m_{\max} = \frac{4\pi^2 MEI \Delta H}{T^2 EI - \frac{4}{3} \pi^2 MH^3} = \frac{4\pi^2 M \Delta H}{\frac{T^2 - 4\pi^2 MH^3}{3EI}}$$

lo que muestra que la sollicitación efectiva es siempre mayor.

Caso 3.—Dos muros iguales reunidos superiormente por un piso rígido, suponiendo además perfecto el empotramiento entre el piso y las muros.

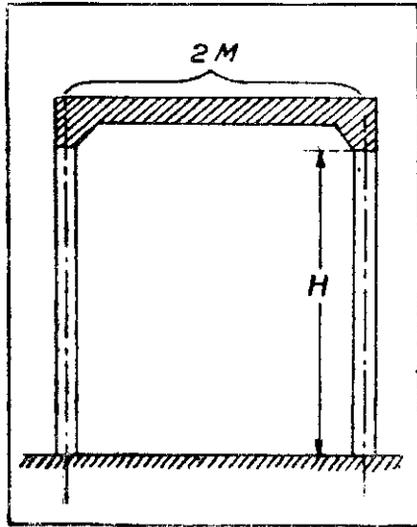
Si el piso tiene una masa $2M$ y los muros son iguales, es natural que sobre cada uno de ellos obre la masa M , supuesto además que la distancia entre los dos muros es suficientemente pequeña para que pueda considerarse que hay concordancia de fase entre los dos sismos que atacan simultáneamente los dos muros.

Las ecuaciones que resuelven el problema son las (6), (8) y (9), pero ahora las constantes A, B, C, D , deben satisfacer las siguientes condiciones:

Para $x = 0$ es $z = \Delta$ y $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, luego

$$A + B + C = \Delta \quad (20)$$

$$A - B + D = 0 \quad (21)$$



Para $x = H$, es $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ puesto que el piso es rígido y hay empotramiento perfecto entre él y el muro. Luego

$$Ae^{RH} - Be^{-RH} - C \operatorname{sen} RH + D \operatorname{cos} RH = 0 \quad (22)$$

Por último, para $x = H$ se debe tener

$$EI \left(\frac{\delta^3 z}{\delta x^3} \right)_{x=H} = - \frac{4\pi^2 M}{T^2} (z)_{x=H}$$

o sea

$$\begin{aligned}
 & E I R^3 (A e^{R H} - B e^{-R H} + C \operatorname{sen} R H - D \cos R H) \\
 &= \frac{4 \pi^2 M}{T^2} \left(A e^{R H} + B e^{R H} + C \cos R H + D \operatorname{sen} R H \right) = 0
 \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{4 \pi^2}{E I T^2} = \frac{R^4}{\rho \omega}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 & A e^{R H} \left(1 + \frac{M R}{\rho \omega} \right) - B e^{-R H} \left(1 + \frac{M R}{\rho \omega} \right) + C \left(\operatorname{sen} R H + \frac{M R}{\rho \omega} \cos R H \right) \\
 & \quad - D \left(\cos R H - \frac{M R}{\rho \omega} \operatorname{sen} R H \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

que es la cuarta ecuación de condición entre A, B, C, D.

Ejemplo numérico.—Sean dos muros iguales de concreto, espesor $e = 0,50$, altura $H = 5$ m. (como en ejemplo de página 6) unidos superiormente por un piso rígido cuya masa M (correspondiente a $1/2$ de la luz entre los muros) valga

$$M = \frac{1200}{g}$$

Calculemos el termino

$$\frac{M R}{\rho \omega} = \frac{M g R}{\rho g \omega} = 0,28$$

Las ecuaciones (20) a (23) entre las constantes conducen con esto a los valores

$$\frac{A}{\Delta} = 0,0166$$

$$\frac{B}{\Delta} = 0,9958$$

$$\frac{C}{\Delta} = 0,0124$$

$$\frac{D}{\Delta} = 0,9793$$

| x | z/Δ | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} / R^2 \Delta$ | $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} / R^3 \Delta$ |
|-------|------------|--|--|
| 0,0 | 1,000 | 1,025 | -1,958 |
| 0,1 H | 1,009 | 0,761 | -1,819 |
| 0,2 H | 1,031 | 0,515 | -1,674 |
| 0,3 H | 1,069 | 0,291 | -1,530 |
| 0,4 H | 1,108 | 0,088 | -1,376 |
| 0,5 H | 1,150 | -0,094 | -1,220 |
| 0,6 H | 1,192 | -0,252 | -1,057 |
| 0,7 H | 1,224 | -0,390 | -0,883 |
| 0,8 H | 1,254 | -0,500 | -0,713 |
| 0,9 H | 1,270 | -0,586 | -0,536 |
| H | 1,278 | -0,652 | -0,358 |

En la figura 4, de acuerdo con esta tabla, se han dibujado la elástica, la curva de momento y la curva de esfuerzos de corte correspondientes a este caso, que es interesante comparar con el de página 6.

Si se comparan los valores de esta tabla con los correspondientes al muro libre en el extremo superior, (pág. 7), se ve que los esfuerzos de corte son ahora mayores en todas las secciones de la pieza. En cambio: los momentos son ahora menores prácticamente en la mitad inferior de la pieza; en la mitad superior son mayores.