Fco. Javier Domínguez S.

Curso de Hidráulica General

CAPITULO I

Nociones Generales

1.—Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.—2. Algunas constantes físicas.—3. Presión, frotamientos interiores.—4. Isotropía y capilaridad.—5. Líquido perfecto.—6. Ciencias hidráulicas.

1. Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.—En la Naturaleza, los cuerpos tienen aparentemente cualidades que los agrupan en dos grandes categorías: los que se oponen a las deformaciones, que los llamamos sólidos, y los flúidos que no se oponen a ellas, o más bien, que solamente presentan resistencia a las deformaciones mientras ellas se realizan, tomando finalmente la forma de los recipientes que los contienen. Los flúidos se dividen a su vez, en gases y líquidos, según que aparentemente varíen o no de volumen por efectos de cambio de presión o de temperatura.

2. Algunas constantes físicas.—Nada tienen de absolutas las propiedades que acabamos de enumerar. Se diferencian solamente en que las magnitudes que las miden son de diferente orden en los flúidos y en los sólidos. La Física General se ocupa especialmente de determinar los coeficientes de dilatación y de compresibilidad de los diferentes cuerpos. Apuntamos aquí algunos valores de las constantes físicas que pueden sernos útiles en las aplicaciones.

La compresión produce en el agua una contracción cúbica de *0,00005* por atmósfera, que desaparece perfectamente si se restablece la presión primitiva. En cambio, una masa de fierro sometida a una compresión uniformemente repartida se contrae *0,0000007* por atmósfera. (Deducido del coeficiente de elasticidad tomando en cuenta las deformaciones transversales).

Los volúmenes de los gases son, a temperatura constante, inversamente proporcionales a las presiones $pv = cte$, (ley de Mariotte) siempre que éstas no sean muy grandes.

La elevación de un grado de temperatura dilata en *1/273* o *0,00366* el volumen de un gas y hace experimentar al agua una dilatación cúbica media de *0,00043* si la temperatura es notablemente mayor de 4° centígrados, pues a esta temperatura una masa de agua tiene su mayor contracción (o su peso máximo por unidad de volumen). El aumento de un grado de temperatura ocasiona en el fierro un aumento de volumen de *0,000033* y en el concreto *0,000042*.

El peso específico o peso de la unidad de volumen del agua destilada es de *1000* Kg/m³ a *4°* de temperatura; el del agua de mar es aproximadamente de *1025* Kg/m³; el del mercurio es *13600* Kg/m³. El aire a la presión atmosférica y a *0°* pesa *1,25* Kg/m³.

Usaremos comúnmente unidades industriales: el metro, el kilogramo y el segundo, salvo indicación expresa de ser unidades *C. G. S.*

3. Presión. Frotamientos interiores.—Si dentro de un flúido concebimos una superficie plana de dimensiones pequeñísimas, ésta cortará las líneas de acción de un inmenso número de fuerzas moleculares: atracciones y repulsiones mutuas de los puntos materiales situados a ambos lados del elemento plano, a distancias imperceptibles. Como este elemento es de pequeñas dimensiones, podemos despreciar las variaciones de las condiciones físicas en su extensión. Por lo tanto, la resultante de las acciones moleculares que obran a través de él, es proporcional a su superficie y tiene una dirección y un sentido determinados. Se llama presión a la razón entre la resultante de las acciones moleculares que se ejercitan a través del elemento plano y el área de él.

El elemento plano ha de ser pequeñísimo y, sin embargo, suficiente para cortar gran número de fuerzas moleculares, en forma de caracterizar la resultante sin llegar a individualizar las componentes. Este concepto especial de magnitud elemental, indispensable al considerar la constitución interna de cuerpos físicos, se usará en casos análogos y, al calcular, se considerará infinitesimal. Podemos, pues, decir que la presión en un punto es el límite de la razón $df/d\omega$ cuando $d\omega$, elemento de área, tiende a cero, llamando f la resultante de las fuerzas moleculares.

La presión no toma en cuenta las fuerzas exteriores, acción de grandes masas a distancias considerables.

Si las acciones moleculares varían con alta frecuencia por vibraciones caloríficas, etc., la resultante considerada es el término medio de los valores instantáneos.

La presión es una cantidad vectorial con magnitud, dirección y sentido. Sus dimensiones en sistema *C. G. S.* son $ML^{-1}\ T^{-2}$ y su medida en *C. G. S.* se expresa en dinas por cm². En Hidráulica la mediremos en Kg/m².

Se llama también presión a la resultante de las acciones moleculares que obran sobre una superficie de dimensiones finitas. Para diferenciarlas se llama a ésta presión total y a la otra presión unitaria o simplemente presión. La presión total tiene dimensiones de fuerza: $M\ L\ T^{-2}$.

Los flúidos se caracterizan por la propiedad de deformarse bajo las acciones de fuerzas exteriores, por pequeñas que sean. Esta propiedad no significa que no opongan resistencia mientras la deformación se verifica; al contrario, esta resistencia existe, retardando más o menos la deformación. Podemos considerar la resistencia a los resbalamientos de masas flúidas como componentes tangenciales de las presiones, funciones de la velocidad relativa de resbalamiento. Estas componentes que se anulan en el reposo, las llamaremos, por analogía, *frotamientos interiores*. La resistencia de los flúidos a sufrir deformaciones se llama *viscosidad*, que no hay que confundir con la *cohesión* o propiedad de resistir compresiones o pequeñas tracciones.

4. Isotropía.—Generándose componentes tangenciales de las presiones únicamente cuando se verifican movimientos, se sigue que en flúidos en reposo no existen sino presiones normales a los elementos planos que se pueden considerar en el seno de ellos. Esta normalidad de presiones que caracteriza la fluidez, se explica diciendo que los flúidos en reposo son sistemas materiales de idéntica constitución interna en todas las direcciones posibles en cada punto; constitución que puede ir variando de un punto a otro.

Las partículas o puntos materiales que constituyen el flúido, estarían distribuídas de la misma manera en todas direcciones en torno del punto considerado. Esta proqiedad, llamada *isotropía*, lleva como consecuencia a la normalidad de las presiones, por razón de simetría.

Los flúidos en movimiento tratarían de recobrar la isotropía y aun de conservarla durante la deformación, y los frotamientos interiores o la oblicuidad de las presiones, serían debidos a la demora en recuperar la isotropía.

La capilaridad, que en los líquidos en reposo se traduce en una elevación o depresión de la superficie en el contorno de la pared, se debería a defecto de isotropía junto a las paredes que contiene al flúido, pues no se puede pretender que tengan idéntica organización molecular el líquido y el sólido que lo rodea.

5. Líquido perfecto.—Considerando extremadas las propiedades que caracterizan a los flúidos, se ha concebido, para simplificar los cálculos, *el líquido perfecto*, como un material isotrópico, sin resistencia a las deformaciones aun mientras se verifican, es decir, de presiones normales a los elementos planos que se pueden considerar, desprovistos de frotamientos y perfectamente incompresibles. El líquido perfecto así concebido facilita el estudio del líquido en reposo y también algo el del líquido en movimiento. Concepción análoga hace la Mecánica Racional al considerar el *sólido perfecto*.

6. Ciencias hidráulicas.—La Hidromecánica estudia el movimiento del líquido perfecto y su equilibrio por medio de un proceso rigurosamente analítico. Sus ramas son, por consiguiente, la *Hidrostática* y la *Hidrodinámica* parte de la Mecánica que se aplica a los líquidos,

La Hidrodinámica se aparta rápidamente de la realidad física al prescindir de las condiciones naturales del líquido, y los problemas que interesan en la práctica son resueltos por ella en completo desacuerdo con la experiencia. Además, su aridez analítica y las dificultades matemáticas que se presentan, han dado nacimiento a la *Hidráulica General*, cuyo objeto es estudiar por el análisis y la experimentación unidos, el equilibrio y movimiento de los líquidos, especialmente del agua.

La Hidráulica General simplifica las cuestiones, suponiendo la incompresibilidad y fluìdez perfectas cuando son aceptables; pero toma en cuenta los frotamientos interiores cuando influyen prácticamente en los fenómenos. Se limita a las cuestiones sencillas y útiles al ingeniero y se caracteriza principalmente porque acude a la experimentación y saca de ella los elementos necesarios para la solución de las cuestiones que el Análisis no puede todavía resolver o resuelve difícilmente.

No entran bajo el dominio de la Hidráulica General las distintas Hidráulicas aplicadas: a regadío, máquinas hidráulicas, obras marítimas, agua potable, alcantarillado, etc., que si bien en ella se apoyan, son en general un conjunto de conocimientos técnicos de construcción.

CAPITULO II

Hidrostática

7. Repartición de las presiones.—8. Líquidos y gases en equilibrio bajo su peso.—9. Aplicaciones diversas. Equilibrio sólido.—10. Principio de Arquímedes.—11. Presiones totales.—12. Cuerpos flotantes.

7. Repartición de las presiones.—Hemos visto que en un flúido en equilibrio, las presiones son normales a los elementos que se pueden considerar en cada punto. Como consecuencia de ello podemos enunciar el llamado *Principio de Pascal:* «En un punto de un flúido en equilibrio, las presiones unitarias sobre todos los planos de cualquiera orientación que pasan por ese punto, son de igual magnitud».

Este principio se demuestra considerando el punto O como origen de un sistema de coordenadas rectaugulares. Cortemos el triedro así formado por un plano oblícuo de orientación cualquiera, situado a una distancia infinitamente pequeña de O. Se forma así el tetraedro elemental $OABC$ (*fig. 1*). Debido a la continuidad, la presión unitaria que obra sobre la cara ABC difiere en un infinitamente pequeño despreciable de la presión unitaria que obra sobre el plano paralelo a ABC que pasa por O.

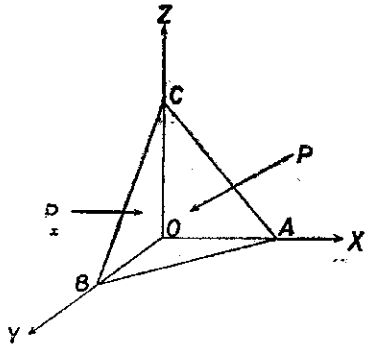

Fig. 1

Como el tetraedro está en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él, proyectadas sobre un eje cualquiera, deben dar suma nula. Tomemos como eje de proyección el eje X. Si llamamos p_x la presión unitaria en la cara OBC, la presión total en esa cara será $p_x \cdot OBC$ y se proyecta en su verdadera magnitud. Las presiones en las caras OAB y OAC, normales a ellas, no dan proyecciones. La presión sobre la cara ABC, llamando p a la presión unitaria sobre ella, vale $p \cdot ABC$ y se proyecta multiplicada por el coseno del ángulo que forma p con OX, igual al diedro BC por tener los lados respectivamente perpendiculares. Las fuerzas exteriores son proporcionales a la masa del tetraedro que es de tercer orden de pequeñez, despreciable al lado de las presiones anotadas, que como proporcionales a la superficie de las caras, son de segundo orden. En consecuencia, la ecuación de proyección se reduce a:

$$p_x \cdot OBC - p \cdot ABC \cos BC = 0$$

en que el sentido de las presiones es hacia las caras. El producto $ABC \cos BC = OBC$, puesto que la superficie OBC es la proyección de la superficie ABC sobre el plano OYZ. Luego queda:

$$p_x = p$$

es decir, en cada punto la presión unitaria tiene un valor independiente de la orientación del plano.

Esta proposición, consecuencia inmediata de la isotropía, reduce el problema de la determinación de las presiones a buscar relaciones entre las presiones en distintos puntos.

Para encontrar estas relaciones, concibamos en el seno del flúido en reposo un cilindro elemental recto, de base $d\omega$ y de altura ds (*fig. 2*) y escribamos las proyecciones de las fuerzas sobre un eje paralelo a ds, que dan suma nula por estar el cilindro en equilibrio.

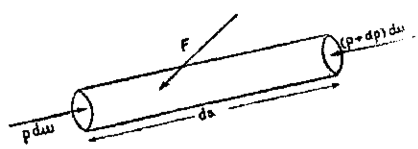

Fig. 2

Las presiones en la superficie cilíndrica dan proyecciones nulas, pues las presiones unitarias son normales en cada punto a la superficie. Las que obran en las bases se proyectan en verdadera magnitud. Llamemos p la presión unitaria en una de las caras y tomemos como sentido positivo el de esta presión. La fuerza será $p\, d\omega$; la de la otra base será: $-(p + dp)\, d\omega$.

Las fuerzas exteriores, proporcionales a la masa de cilindro $\rho\, d\omega\, ds$, (en que ρ es la densidad o masa de la unidad de volumen), tienen como valor absoluto $F \rho\, d\omega\, ds$, llamando F la aceleración resultante. Estas fuerzas se proyectan multiplicadas por el coseno del ángulo que forma F con ds. En consecuencia, la ecuación de proyección es:

$$p\, d\omega - (p + dp)\, d\omega + F \rho\, d\omega\, ds \cos\, (F.\, ds) = 0$$

que simplificada da:

$$dp = \rho\, F\, ds \cos\, (F, ds) \qquad \ldots .(1$$

Integrándola hasta completar un cilindro de altura finita $s - s_o$, en cuyas bases extremas las presiones las llamamos p y p_o, se tiene:

$$p - p_o = \int_{s_o}^{s} \rho\, F \cos\, (F, ds)\, ds$$

Ecuación que dice que la variación de la presión entre dos puntos de un flúido en reposo es igual al trabajo que efectúan a lo largo del camino que los une, las fuerzas exteriores, por unidad de volumen.

La ecuación (1 se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = F \cos\, (F, ds)$$

Eligiendo un sistema de ejes rectangulares en que dx, dy, dz sean las proyecciones de ds y llamando X, Y, Z las de la aceleración resultante de las fuerzas exteriores, respecto a los tres ejes elegidos, se tienen las ecuaciones generales de la Hidrostática, debidas a Euler:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} &= X \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} &= Y \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} &= Z \end{aligned} \qquad \ldots. (2$$

Multiplicadas estas tres ecuaciones por dx, dy, dz, respectivamente, sumándolas y tomando en cuenta que el primer miembro es el diferencial total de $\frac{1}{\rho}\,p$ se tiene:

$$\frac{1}{\rho}\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \qquad \ldots. (3$$

El primer miembro es integrable siempre que conozcamos la relación entre ρ y p; esta relación es la ecuación característica. En los flúidos incomprensibles, es decir, los líquidos, esa ecuación es:

$$\rho = \frac{\rho_o}{1 + \alpha\,t}$$

en que ρ_o es la densidad a la temperatura $0°$; α es el coeficiente de dilatación y t la temperatura. Como se ve, ρ es independiente de p. En los gases la ecuación característica es:

$$\rho = \frac{\rho_o}{p_o\,(1 + \alpha t)}\,p$$

en que α y t tienen el mismo significado anterior; ρ_o es la densidad a $0°$ y a la presión p_o; p es la presión. Como se ve, ρ es proporcional a p.

Se llaman superficies de nivel o superficies equipotenciales a las superficies de igual presión, igual densidad e igual temperatura que cumplen con la condición:

$$\frac{1}{\rho}\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

Estas superficies, como indican las ecuaciones, dan trabajo nulo para desplazamientos sobre ellas y son, por consiguiente, normales en todos su puntos a la dirección de las fuerzas exteriores.

8. Líquidos y gases en equilibrio bajo su peso.—El caso de mayor interés práctico lo presentan los flúidos sometidos a su peso como única fuerza exterior. Si tomamos los ejes coordenados rectangulares X, Y en un plano horizontal y el de la Z vertical ascendente, en la ecuación (3 X e Y, valdrán cero y Z,—g, aceleración de gravedad con signo negativo; por lo tanto:

$$\frac{1}{\rho} dp = -g\, dz \qquad \ldots. (4$$

En líquidos incomprensibles, efectuando la integración desde una cota z_o en que la presión es p_o hasta otra cota arbitraria z donde valdrá p, se obtendrá:

$$p - p_o = \rho g\, (z_o - z)$$

El producto de la masa de la unidad de volumen por la aceleración de la gravedad nos da el peso de la unidad de volumen o *peso específico* que llamaremos γ.

La última ecuación puede escribirse, si la dividimos por $\rho g = \gamma$, como sigue:

$$z_o + \frac{p_o}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} = cte. \qquad \ldots. (5$$

expresión que nos dice que en un líquido incomprensible es constante la suma de la cota y de la presión unitaria dividida por el peso específico.

La razón $h = p/\gamma$ homogénea a una longitud, es llamada *altura de presión*, pues es la altura de la columna líquida capaz de producir la presión p.

La suma constante dada por la expresión (5, llamada *carga*, *cota piezométrica* o *altura piezométrica*, resume la ley de repartición de presiones en un líquido pesado en equilibrio. Por esto se le llama *ley Hidrostática*. Ella indica que si a partir de la cota z de un punto de un líquido en reposo se agrega verticalmente la altura de presión, se llega al lugar geométrico llamado *plano de carga*. Si el líquido se extiende hasta ese plano, ahí la presión es nula: encima no hay peso alguno, está vacío. (1)

Las superficies de nivel en los flúidos pesados en equilibrio son planos horizontales; por lo tanto lo serán la superficie libre de un líquido o superficie de él en contacto con una atmósfera constante y la superficie de separación de líquidos de distinto peso específico, superpuestos.

Una columna líquida de altura h produce en su pie la presión $p = \gamma h$; por lo tanto, las presiones que dos líquidos de distinto peso específico producirán con igual desnivel, guardarán la razón de sus pesos específicos. A la inversa, una presión dada producirá desnivelaciones inversamente proporcionales a los pesos específicos:

$$p = \gamma_1\, h_1 = \gamma_2\, h_2$$

(1) Las experiencias de Askenasy, repetidas por otros botánicos, de hacer subir agua indefinidamente, aun no bien explicadas, parecen, sin embargo, deberse a acciones eléctricas. A estas acciones se debería la subida de la savia en grandes árboles.

de donde

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

En los flúidos comprensibles o gases podemos poner $\gamma = K\,p$, y por lo tanto, la integración de la ecuación (4 nos da:

$$\frac{1}{K}\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{p} = -g\int_{z_o}^{z} dz \qquad \ldots\ldots (6$$

$$L\,\frac{p}{p_o} = g\,K\,(z_o - z)$$

En las aplicaciones usuales de la Hidráulica se supone constante la presión atmosférica; su valor medio se acepta de 10000 Kg/m². Se la llama atmósfera métrica y sus alturas representativas son: $h = 10000 : 1000 = 10$ metros de agua; $h = 10000 : 13600 = 0{,}735$ metros de mercurio. En columnas de aire de poca importancia se supone su densidad independiente de la presión; luego, según lo dicho anteriormente, a igualdad de desniveles de aire y agua, corresponden variaciones de presión de *1,25/1000*. Las variaciones de presión de aire son despreciables al lado de las del agua. En los líquidos superpuestos, el mínimo de potencial exige, para el equilibrio estable, que los más pesados se vayan abajo.

9. Aplicaciones diversas.—Equilibrio sólido.—Una de las aplicaciones prácticas más inmediata de los principios expuestos la constituyen los piezómetros, aparatos destinados a medir diferencias de presión por medio de columnas líquidas pesadas o livianas. Más adelante, en las medidas hidráulicas, describiremos estos aparatos. Por ahora, con un ejemplo veremos su teoría.

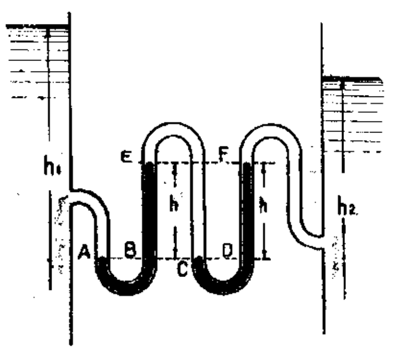

Fig. 3

Supongamos unidos dos depósitos por un tubo de sección constante en forma de *U*, como en la *figura 3*. Los depósitos están llenos de agua y sus cotas piezométricas son respectivamente h_1 y h_2; siendo h_1 mayor que h_2. Las dos partes bajas de las *Ues* están llenas de mercurio y entre ambas ramas y a continuación de ellas hay agua. Se pide determinar la altura h de las columnas iguales de mercurio de ambos tubos que comunican los depósitos. Las columnas descienden del lado de la mayor cota piezométrica h_1 y ascienden del lado del otro depósito.

En los puntos A y B hay la misma presión, pues por ambos puntos pasa un plano equipontencial. La presión en B excede a la de E en $\gamma_m h$, siendo γ_m el peso específico del mercurio. La de E es mayor que la de C en el valor γh, si γ es el peso específico del agua. La de C y D son iguales por la razón antedicha, y la de D excede a la de F en $\gamma_m h$.

En resumen, el exceso de presión entre los puntos A y F está equilibrado en el piezómetro por dos columnas de mercurio de altura h menos una de agua. Sobre un mismo plano horizontal, por ejemplo el que pasa por A, la diferencia de altura piezométrica entre los dos depósitos, es:

$$2h\frac{(\gamma_m-\gamma)}{\gamma}$$

La diferencia de cotas piezométricas entre los depósitos es h_1-h_2, diferencia que es justamente equilibrada por los desniveles del mercurio en el piezómetro. Por lo tanto:

$$\gamma\,(h_1-h_2)=2\,h\,(\gamma_m-\gamma)$$

de donde

$$h=\frac{h_1-h_2}{2\,(\gamma_m-\gamma)}\gamma$$

Como ejemplo de la variación de presiones en flúidos comprensibles, podríamos calcular la repartición de presión atmosférica. La fórmula a que se llega puede considerarse como elemental en la nivelación barométrica.

En la ecuación (6, $g\,K$, sacado de la ecuación característica correspondiente, vale:

$$g\,K=\frac{g\,\rho_o}{p_o\,(1+\alpha\,t)}$$

Reemplazando los valores, notando que $g\,\rho_o$ es el peso del aire a $0°$ y a presión p_o. que vale $1{,}25$ Kg/m³ y si tomamos $p_o=10000$ Kg/m², o sea, la presión atmosférica métrica, se tiene:

$$g\,K=\frac{1{,}25}{10000\,(1+\alpha\,t)}$$

que introducido en la ecuación ya citada nos da:

$$L\frac{p}{p_o}=\frac{1{,}25}{10000\,(1+\alpha t)}(z_o-z)$$

Despejando $L\,p$ y recordando que $\alpha=0{,}00336$, nos queda:

$$L\,p=\frac{0{,}000125}{1+0{,}00366\,t}(z_o-z)+L\,10000$$

Si se pudiera aceptar, en desacuerdo con la experiencia, el equilibrio isotérmico, o sea, $t=cte;\ 10°$ por ejemplo, tendríamos:

$$L\,p=0{,}000121\,(z_o-z)+9{,}211$$

Partiendo de $z_o=0$ se obtiene finalmente:

$$L\,p=9{,}211-0{,}000121\,z$$

Dando valores a z se obtiene los valores de p que van a continuación:

z	0	1000	2000	3000	5000	10000	20000	metros
p	10000	8910	7940	7080	5560	3020	900	Kg/m²
p/γ_m	0,735	0,655	0,584	0,520	0,408	0,222	0,066	Columna de Hg.

No corresponde aquí tratar el problema más cercano a la realidad, del equilibrio adiabático.

Equilibrio sólido.—La ley de variación de presiones dada por la ecuación (3 es aplicable a los flúidos en movimiento, si éste se efectúa en todo el conjunto sin deformaciones. Tal sucede, por lo menos aproximadamente. en el líquido contenido en un vaso que gira en torno de un eje vertical. Este movimiento de rotación del vaso que va comunicándose desde las paredes a las capas líquidas vecinas y que por éstas se propaga a todo el conjunto, se acepta perfeccionado en toda la masa, constituyendo un caso del fenómeno llamado *equilibrio sólido.*

En este caso es posible aplicar al flúido en movimiento la ecuación de equilibrio, si de acuerdo con el principio de D'Alembert se agrega a la aceleración de las fuerzas exteriores la fuerza de inercia, que es el producto de la masa por la aceleración efectiva cambiada de signo. En nuestro caso la fuerza de inercia es la fuerza centrífuga.

Eligiendo un sistema de eje Z en el eje de rotación y otro radial, podremos escribir la ecuación (3, notando que la proyección Z vale $-g$ y que en el radio se proyecta en verdadera magnitud la aceleración centrífuga que vale $\omega^2 r$, si la velocidad angular constante es ω. La ecuación diferencial (3, nos dice en este caso:

$$\frac{1}{\rho}\,dp=\omega^2\,r\,dr-g\,dz$$

Supongamos que el origen de coordenadas está en el punto en que la superficie libre corta al eje de rotación o eje Z; descontemos la presión atmosférica e integremos desde $z=0$, donde $p=0$ y $r=0$, hasta un valor z en que el radio es r y la presión p. Dividiendo por g tenemos:

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^p dp=\frac{\omega^2}{g}\int_0^r r\,dr-\int_0^z dz$$

o sea;

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{\omega^2\,r^2}{2g}-z$$

ecuación que nos da la altura de presión en el punto de coordenadas z y r. Si hacemos $p/\gamma = cte$. tendremos la ecuación de una superficie de nivel y como caso especial para $p/\gamma = 0$, la superficie libre. Las superficies de nivel son paraboloides de revolución en torno del eje Z.

EJEMPLO.—En un vaso cilíndrico de *0,5* m. de diámetro y *1* m. de altura hay *0,100* m³ de agua. Se imprime al vaso una rotación en torno de su eje de *120* vueltas por minuto. Se pide determinar la forma y ubicación de la superficie libre del líquido. (*Fig. 4*).

La ecuación del paraboloide de la superficie libre contando las z desde el punto en que ella corta el eje, es:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

La velocidad angular vale, en radianes por segundo:

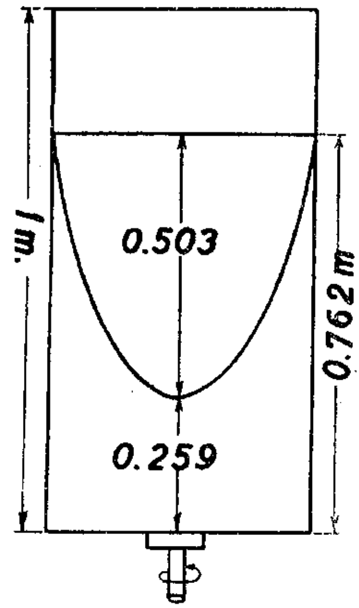

Fig. 4

$$\omega = \frac{120 \cdot 2\pi}{60} = 12{,}56 \ seg^{-1}$$

y por lo tanto introduciendo valores:

$$z = \frac{12{,}56^2}{19{,}6} \cdot r^2 = 8{,}04\, r^2$$

Dando valores a r se tiene los siguientes puntos de la traza de la superficie libre sobre un plano vertical diametral:

$r =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	metros
$z =$	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,503	»

Los últimos valores de r y z indican que *0,503* mts. más alto que el punto de origen, el paraboloide corta la pared del vaso.

Para determinar la posición del origen respecto a la base del vaso, basta escribir la ecuación que dice que la suma del volumen del líquido más el hueco del paraboloide es igual al volumen del cilindro cuya pared toca el líquido.

El volumen hueco del paraboloide es $\frac{1}{2}\pi r^2 h$, siendo r el radio del cilindro, en este caso *0,25* m. y h la altura que vale *0,503*. Así calculado el volumen del paraboloide es: $0{,}0494$ m³. El volumen del líquido es $0{,}1$ m³. Llamando z_0 la altura del origen de las z, contada desde el fondo, tendremos la ecuación:

$$\pi \cdot 0{,}25^2 \cdot (0{,}503+z_0)=0{,}100+0{,}0494$$

de donde $$z_0=0{,}259\ m.$$

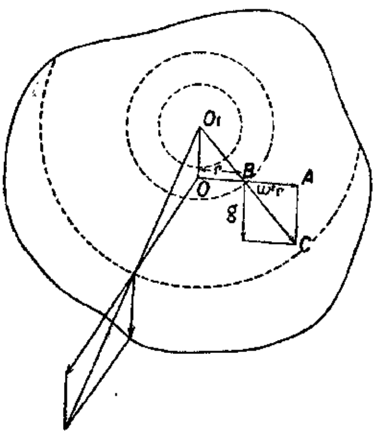

Fig. 5

Interesante también desde el punto de vista técnico; pero realizable en la práctica solamente en circunstancias especiales, es el *equilibrio sólido que se produce entorno de un eje horizontal.*

En este caso, si O es la proyección del eje de rotación en la *figura 5*, un elemento de volumen líquido situado en el punto B, a la distancia radial r del eje, está sometido a su peso, cuya fuerza por unidad de masa es g y a la fuerza centrífuga que es $\omega^2 r$. El triángulo ABC, construído con los vectores g, $\omega^2 r$ y su resultante, es semejante al OBO_1 formado por el radio r, la prolongación de la resultante y la vertical levantada desde O. Se tiene, pues, la relación:

$$\frac{OO_1}{g}=\frac{r}{\omega^2 r}$$

o sea $$OO_1=\frac{g}{\omega^2}$$

El punto B es un punto cualquiera; podremos por lo tanto hacer la misma construcción para otro, y obtener el mismo punto O_1 que dista g/ω^2 de O, constante para todos los puntos que consideremos. Esto significa que el punto O_1 es de concurrencia de todas las resultantes, y en consecuencia, que las superficies de nivel, normales a la resultante, son superficies cilíndricas cuyo eje, paralelo al de rotación, pasa por O_1. La superficie libre lo sería también, pero como no es de revolución en torno del eje de rotación, su conservación exigiría deformaciones o deslizamientos del líquido, contrarios a la hipótesis del equilibrio sólido.

Es de notar que O_1 tiende a confundirse con O cuando la velocidad de rotación tiende a infinito. Si el recipiente está totalmente lleno, es también posible la verificación de este equilibrio sólido.

10. Principio de Alquímides. —Para estudiar las presiones totales y el equilibrio de los cuerpos flotantes, se aplica el llamado principio de Arquímedes, cuyo enunciado va a continuación: «Un cuerpo inmóvil, total o parcialmente sumergido en un líquido, está sometido a presiones que tienen una resultante única, vertical ascendente, cuyo punto de aplicación es el centro de gravedad del volumen líquido desalojado por el cuerpo y cuya magnitud es el peso de este volumen de flúido».

Este principio es una consecuencia de aceptar que el sólido sumergido no afecta la isotropía del flúido en equilibrio, es decir, que en la superficie del sólido la capilaridad es despreciable y las presiones son normales. Es como si se dijera que las presiones que se ejercitan sobre la superficie del cuerpo sumergido son las mismas que se ejercitarían en ese lugar si el cuerpo sumergido no existiera y continuara el flúido.

Se aplica el principio a cuerpos sumergidos en líquidos superpuestos contando los pesos de los volúmenes desalojados de cada líquido entre los planos horizontales de separación. En cuerpos flotantes se desprecia el peso del aire desalojado.

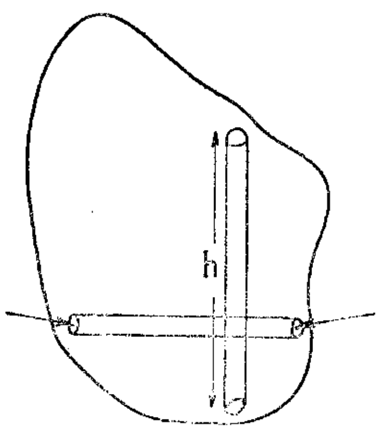

Fig. 6

Se puede demostrar este principio descomponiendo el cuerpo en infinitos prismas elementales, horizontales primero y verticales después, y estudiando las presiones a que están sometidas sus bases. Considerando un prisma horizontal elemental (*fig.* 6), encontramos que las presiones unitarias sobre ambas bases oblicuas son de igual magnitud, pues ambas valen el peso de la columna líquida de unidad de superficie y cuya altura es la altura piezométrica. El valor de la presión total es esa presión unitaria por el respectivo elemento de área y se proyecta cada una sobre la dirección horizontal del prisma, multiplicada por el coseno del ángulo que forma la presión con esa dirección, el ángulo es igual al que forma la cara oblicua con la sección recta del prisma. Cada proyección vale entonces la presión unitaria por la sección recta y son, por consiguiente, iguales y de signo contrario. Su suma será por lo tanto nula. Igual cosa ocurre con todas las componentes horizontales. Luego la resultante, no teniendo componente horizontal, es vertical.

Si descomponemos el cuerpo en prismas elementales verticales, es válida la consideración anterior sobre el ángulo. El exceso de presión en la base inferior sobre la de la superficie superior es la altura del prisma elemental multiplicada por el peso específico del agua y por su sección recta; es decir, el peso del prisma como si fuera líquido. La suma de todos estos excesos nos da, para la resultante, el valor del peso del liquido desalojado. El punto de aplicación de la resultante es, por consiguiente, el centro de gravedad del flúido desalojado, que puede coincidir o no con el del cuerpo, y que se llama *centro de carena.*

Más sencillamente pudo haberse demostrado el principio de Arquímedes, atendiendo a que las presiones que se ejercitan sobre un cuerpo sumergido son iguales a las que se ejercitarían sobre la superficie de la masa líquida que él reemplaza. Esta masa flúida estaría en equilibrio y por lo tanto su peso es igual a la resultante de las presiones que obrarían sobre su superficie, por lo tanto, esta resultante es igual y de signo contrario al peso del líquido desalojado y se aplica en el centro de carena.

En los cuerpos flotantes, las presiones superiores en los prismas elementales son nulas. La parte sumergida se llama *carena*.

La resultante de las presiones se llama *subpresión*, peso perdido o deplazamiento.

11. Presiones totales.—Si las paredes son planas, es sencillo el cálculo de presiones totales sobre áreas limitadas de ellas. Se trata en este caso de presiones elementales normales a la pared, que forman un sistema de fuerzas paralelas del mismo sentido, que siguen una ley de variación proporcional a la altura vertical del líquido; equivale el sistema a una resultante única. Si la pared tiene plano vertical de simetría, en él estará situada la resultante, porque en ese plano están las resultantes parciales de las presiones sobre fajas horizontales elementales.

Sea calcular la presión total sobre una área limitada situada en una pared plana que forma un ángulo α con la horizontal (*fig. 7*). Elijamos como eje de las

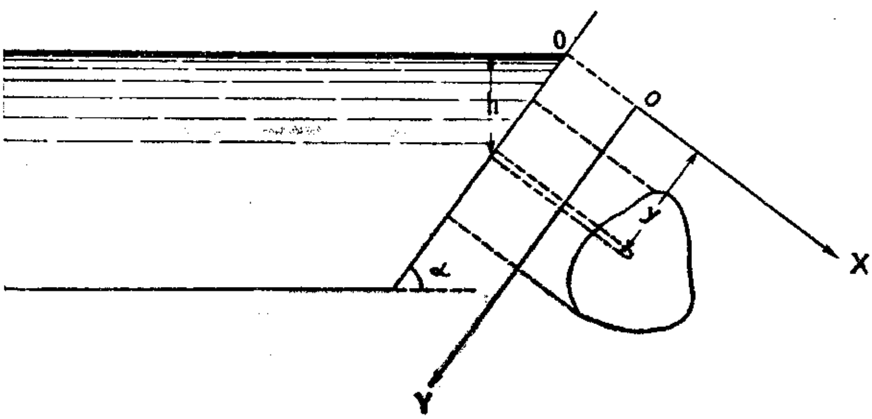

Fig. 7

X la intersección de la pared con la superficie libre, y el de las Y en la línea de máxima pendiente del plano en que está el área. Un elemento $d\omega$ soporta una presión total elemental $\gamma h\, d\omega$; h vale $y\, sen\, \alpha$, y por lo tanto, la presión es: $\gamma\, y\, sen\, \alpha\, d\omega$. La presión total es, por ser las fuerzas paralelas, la suma algebraica de todas las elementales hasta cubrir el área.

$$P = \gamma\, sen\, \alpha \int_{o}^{\Omega} y\, d\omega \qquad \ldots. (7$$

Notando que el integral es el momento estático de la sección respecto al eje OX, producto de área Ω por la distancia del centro de gravedad de ella al eje, llamando γ la coordenada de dicho centro, se tiene:

$$P = \gamma\, sen\, \alpha \cdot \Omega\, \eta \qquad \ldots. (7\, a$$

Como $\gamma\,\eta\,sen\,\alpha$ es la presión en el centro de gravedad, se puede decir que la presión total es el producto de la presión en el centro de gravedad por la magnitud del área.

Los momentos de la presión en un elemento $d\,\omega$ respecto a los ejes, son:

$$\gamma\,sen\,\alpha \cdot y^2\,d\,\omega$$

$$\gamma\,sen\,\alpha \cdot x\,y\,d\,\omega$$

Los momentos de la resultante son pues:

$$M=\gamma\ sen\,\alpha \int_0^\Omega y^2\,d\,\omega = P\,a$$

$$L=\gamma\ sen\,\alpha \int_0^\Omega x\,y\,d\,\omega = P\,b$$

Las coordenadas a y b del punto de aplicación de la resultante sobre el área las obtendremos dividiendo estos momentos de la resultante por la magnitud de ella:

$$a=\frac{\int_0^\Omega y^2\,d\,\omega}{\int_0^\Omega y\,d\,\omega} \qquad b=\frac{\int_0^\Omega x\,y\,d\,\omega}{\int_0^\Omega y\,d\,\omega} \qquad \ldots\ldots (8$$

En el valor de a de las expresiones (8, el numerador es el momento de inercia del área con respecto del eje de la X. Este momento de inercia referido al que el área da respecto al eje horizontal que pasa por su centro de gravedad, vale: $I_g + \Omega\,\eta^2$; I_g vale a su vez $\Omega\,\rho^2$ llamando ρ al radio de giro. Notando que el denomindor vale, como se dijo, $\Omega\,\eta$, se tiene:

$$a = \eta + \frac{\rho^2}{\eta}$$

es decir, que el punto de aplicación de la presión total o *centro de presión* está siempre más bajo que el centro de gravedad del área. La ecuación, además, demuestra que a medida que aumenta la profundidad a que se encuentra situada el área considerada, tienden a coincidir el centro de gravedad con el centro de presión.

Si el área es horizontal, las fórmulas (7a, y (8, conducen a una indeterminación aparente que se salva considerando que sobre el área obra un sistema de fuerzas paralelas e iguales, o si se quiere, que la resultante vale el peso del cilindro líquido que gravita sobre el área.

El cálculo de las presiones sobre paredes curvas se puede efectuar dividiéndolas en secciones pequeñas asimilables a áreas planas o descomponiendo las presiones elementales en tres componentes: dos horizontales de direcciones elegidas y una vertical. Las resultantes parciales de estos tres sistemas pueden no concurrir.

Cada resultante horizontal tiene la misma magnitud y línea de acción de la presión total que obra en la proyección del área curva sobre un plano vertical perpendicular a la dirección de ella. La componente vertical tiene la magnitud y línea de acción del peso del cilindro vertical de líquido que gravita sobre el área. Si la superficie curva está limitada por una curva plana, según el principio de Arquímedes, la presión equivale al sistema de fuerzas constituído por la presión que se ejercita sobre el área plana que limita a la curva y por el peso del volumen del líquido encerrado entre ambas superficies.

Se acostumbra descontar de todas partes la presión atmosférica cuando ella obra en ambos lados del área cuya presión se calcula.

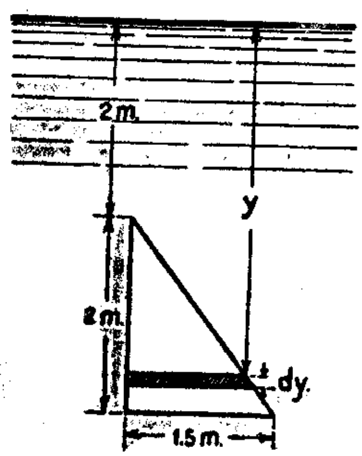

Fig. 8

En flúidos sometidos a grandes presiones se suelen despreciar, en áreas pequeñas, las variaciones de presión debidas a la ley hidrostática.

Ejemplo 1.—Calcular la presión total y la ubicación del centro de presión sobre el área triangular de la *figura 8*, situada en la pared vertical de un estanque, cuyo vértice dista *2* metros de la superficie libre y que tiene un lado vertical.

La distancia del centro de gravedad del triángulo a la superficie libre es $2+{}^2/_3 \cdot 2 = 3{,}33$ mts. La presión unitaria a esa altura es $\gamma\, 3{,}33$ Kg/m²; el área del triángulo es $1{,}5$ m². Por lo tanto la presión total es:

$$P = \gamma \cdot 3{,}33 \cdot 1{,}5 = 5000 \text{ Kgs.}$$

Sobre un elemento de área, $d\omega = \frac{1{,}5}{2}(y-2)\,dy$, obra la presión unitaria γy; por lo tanto la presión total sobre el elemento es:

$$p\, d\omega = \gamma \frac{1{,}5}{2}(y-2)\, y\, dy$$

que da los momentos:

respecto al eje de las X $\qquad \gamma\, 0{,}75\, (y-2)\, y^2\, dy$

respecto del eje de las Y $\qquad \frac{\gamma}{2}\, 0{,}75\, [y-2]^2\, y\, dy$

Los momentos de la resultante respecto a los ejes valen:

$$M = 0{,}75\, \gamma \int_2^4 (y-2)\, y^2\, dy = 17000 \text{ Kg. m.}$$

$$L=0,563\frac{\gamma}{2}\int_{2}^{4}(y-2)^2\,y\,dy=2625\ \text{Kg. m.}$$

$$a=\frac{M}{P}=\frac{17000}{5000}=3,4\,\text{m.}\qquad b=\frac{L}{P}=\frac{2625}{5000}=0,525\ \text{m.}$$

EJEMPLO 2.—Calcular la presión total y el punto de aplicación de ella sobre la superficie de cuarto de cilindro recto de *2* m. de radio y *3* m. de altura colocado horizontalmente como lo indica la *figura 9*.

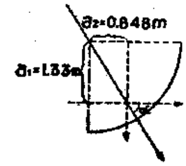

Fig. 9

Como esta superficie tiene plano de simetría la resultante está situada en este plano.

Descomponiendo las presiones en una vertical P_h, perpendicular al plano *MNPQ*, y en otra vertical P_v; avaluaremos separadmente ambas resultantes parciales. La horizontal vale:

$$P_h=\gamma\cdot 1\cdot 6=6\ 000\ \text{Kgs.}$$

y su línea de acción horizontal está, aplicando la fórmula general (*8*, *a*:

$$a_1=\frac{3\cdot 2^3}{3\cdot 1\cdot 6}=1,333\ \text{m. de la superficie libre.}$$

La componente vertical, peso del cuarto de cilindro líquido, vale:

$$P_v=\frac{\gamma\,\eta\,r^2\cdot 3}{4}=9\ 493\ \text{Kgs.}$$

y su línea de acción dista $a_2=0,6\,r\cdot 0,707=0,848$ m. deducida de la situación del centro de gravedad del sector (1), a partir de la vertical que pasa por el centro de figura del cilindro.

El valor de la resultante general, o sea, la presión total sobre la superficie curva es:

$$P=\sqrt{6000^2+9423^2}=11171\ \text{Kgs.}$$

Su inclinación respecto a la horizontal es:

$$tg\,\alpha=\frac{9423}{6\,000}=1,57\qquad \alpha=57^\circ\,30'$$

También puede calcularse esta inclinación tomando en cuenta que la resultante

(1) Hutte, edición española, 1926. Pág. 204.

pasa por el eje del cilindro, debido a que todas las componentes pasan por él. Conocidos a_1 y a_2 tenemos, (*Fig. 9a*).

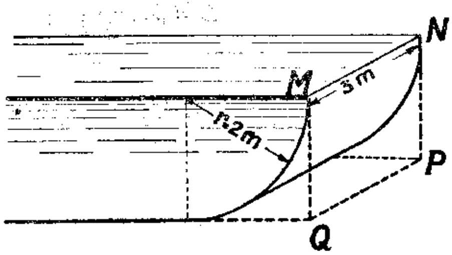

Fig. 9a

$$tg\ \alpha = \frac{1,333}{0,848} = 1,57$$

12.— Cuerpos flotantes. — Estudiaremos las condiciones elementales del equilibrio de los cuerpos flotantes.

En un cuerpo totalmente sumergido, en equilibrio, cuyo peso es por lo tanto igual al producto de su volumen por el peso específico del flúido, la subpresión es igual al peso del cuerpo. La condición primera de equilibrio es que el centro de carena y el de gravedad del cuerpo, estén en una vertical. Estos centros no coincidirán si el cuerpo no es homogéneo.

Para que el equilibrio sea estable, es necesario que el centro de gravedad esté más bajo que el centro de carena; pues una rotación en torno de éste originaría un par de reacción, constituído por la subpresión ascendente que se aplica en el centro de carena y el peso aplicado en el centro de gravedad, que tiende a restablecer la forma de equilibrio que existía, que es de potencial mínimo, (*fig. 10*).

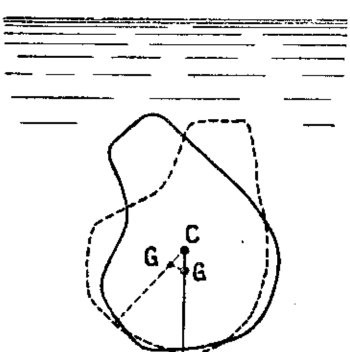

Fig. 10

Si el centro de gravedad y el de carena están en una vertical, pero aquel arriba, el equilibrio es inestable, pues cualquier rotación en torno del centro de carena, genera un par que tiende a llevar el centro de gravedad a su posición más baja. Una rotación virtual en torno de un eje vertical, daría trabajos nulos de las fuerzas, peso y subpresión. Otro tanto sucede con una traslación horizontal, de manera que estos movimientos manifiestan indiferencia al equilibrio.

Para el equilibrio de cuerpos flotantes es necesario que el peso del cuerpo y la subpresión sean iguales y que los puntos de aplicación de las fuerzas se encuentren en una vertical. Pero si imaginamos un cuerpo flotante homogéneo, es imposible que el centro de gravedad esté más bajo que el centro de carena. Rotaciones virtuales en torno del centro de carena alterarían su volumen y forma trasladando su centro. De modo que la condición de equilibrio estable en este caso es distinta de la de los cuerpos sumergidos.

Para estudiarla, consideraremos únicamente el caso de un sólido flotante que tiene un plano vertical de simetría en que están situados el centro de gravedad y el de carena, considerando tres rotaciones infinitesimales.

(*Continuará.*)