Fco. Javier Domínguez S.

Curso de Hidráulica General

(Continuación)

45. Coeficientes experimentales de gasto.—Entre los experimentadores más prolijos sobre el tipo de vertedero que nos ocupa, podemos colocar a Francis en EE. UU. (1852); Steley y Stearns, también en EE. UU. (1877); Bazin en Francia (1888-1898); Frese, en Alemania (1890) y Rehbock, también en Alemania (1910—1929); King, (1918), y los que después se indican.

Apuntaremos aquí, sumariamente, la fórmula de Francis, usada en EE. UU. e Inglaterra, que si se prescinde de la velocidad inicial, es: $Q = 1,84\,h^{\frac{3}{2}}$, lo que da $m = 0,416$.

Bazin (1888), de sus experiencias, dió para m la fórmula:

$$m = \left(0,405 + \frac{0,003}{h}\right)\left[1 + 0,55\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (20$$

Como las experiencias fueron hechas en un vertedero de 2 mts. de largo, con cargas comprendidas entre *0,08* y *0,55* mts. y alturas de vertederos de *0,24*, *0,35*, *0,50*, *0,75* y *1,13* mts. esos son en rigor los límites de aplicación de la fórmula. La cresta, como indica la *fig. 101*, estaba formada por un palastro de *0,007* mts. Acercándose a las condiciones del experimentador se puede conseguir en afores indirectos una precisión que no excederá de *1,5 %*. Los valores de m de esta expresión aparecen tabulados en la **Tabla N.° 12** (1).

Fig. 101

Rehbock ha experimentado vertederos de pared delgada desde 1911 hasta ahora; ha dado 4 fórmulas (1911, 1912, 1913 y 1929). Sus experiencias, muy prolijas, hechas en Karlsruhe, se caracterizan por las precauciones tomadas para regularizar la corriente aguas arriba del vertedero, disminuyendo así el coeficiente de la altura de velocidad afluente.

---

(1) Dice Bazin que la fórmula simplificada: $m = 0,425 + 0,21\,\dfrac{h^2}{(h+a)^2}$ da una aproximación suficiente para cargas comprendidas entre *0,1* y *0,3* m. Esta fórmula es muy parecida a la teórica (*14a*) e indica que con un error máximo de 2% la velocidad inicial no influye en el gasto si $\dfrac{h}{h+a} = 0,2$.

La fórmula de 1929 (1), es la siguiente:

$$m = \frac{2}{3}\left(0{,}6035 + 0{,}0813\,\frac{h}{a} + \frac{0{,}00009}{a}\right)\left(1 + \frac{0{,}0011}{h}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (21$$

Esta expresión, que es el resultado de las experiencias de Rehbock hechas entre 1911 y 1929, coincide muy bien con las de Schoder y Turner que se citan después, con las de Lindquist (1926), ($a = 0{,}5$ m; $0{,}12 < h < 0{,}45$), Schaffernack (1915), ($a = 0{,}56$ m; $0{,}03 < h < 0{,}31$), las de la Eidgenössisches Amt für Wasserwirtschaft (Berna 1926), ($a = 0{,}8$ m; $0{,}1 < h < 0{,}8$ m) y las de Jones (Universidad de Cornell, 1927) ($a = 0{,}76$ m. $0{,}012 < h < 0{,}41$ m.), en total 280 experiencias, además de las de Rehbock. Da en casos análogos a los de la experimentación errores que no llegan a 1%. Es de gran utilidad en aforos por vertedero en laboratorio. En la **Tabla N.° 13** pueden verse los valores del coeficiente m para efectuar cálculos.

También ha experimentado King, en la Universidad de Michigan (1918), que da para m la expresión:

$$m = \frac{0{,}402}{h^{0{,}03}}\left[1 + 0{,}56\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (22$$

La Sociedad Suiza de Ingenieros y Arquitectos (1924), da la fórmula:

$$m = 0{,}410\left(1 + \frac{1}{1000\,h + 1{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (23$$

esta expresión, que corresponde a muchas experiencias en condiciones de regularización de la corriente, es válida para cargas comprendidas entre $0{,}025$ y $0{,}80$ mts. y alturas de barrera superiores a $0{,}3$ m., siempre que dicha altura sea mayor que la carga. Puede usarse mediante los siguientes cuadros:

$h =$	0.025	0.050	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.7	0.8
$0.410\left(1 + \frac{1}{1000\,h + 1{,}6}\right) =$	0.425	0.417	0,414	0.413	0,412	0.4115	0.411	0.4105	0,410	0.410

$\frac{a}{h} =$	1	1.05	1.10	1.20	1.30	1.50	2	3	5	10	20	∞
$1 + 0{,}5\frac{h^2}{(h+a)^2} =$	1.125	1.120	1.113	1.104	1.095	1.08	1.056	1.031	1.014	1.004	1.001	1.00

Esta ecuación da resultados muy parecidos a la de Rehbock.

Posteriormente, Shoder y Turner (1927), en la Universidad de Cornell, como resultado de *2438* medidas (2) con cargas variables de $0{,}003$ m. a $0{,}84$ m., alturas de

(1) Wassermessung mit scharfkantingen Überfallwehren (1929).

(2) De estas experiencias, 1276 fueron hechas por Schoder y Turner y el resto por los señores Dawson, Martin, Jones, Meyer & See y Weber.

barrera comprendidas entre *0,15* y *2,3* m. y largos de vertederos de *0,3* a *1,3* m., dan la fórmula:

$$Q = 0{,}416\, lh \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{U_h^2}{2g\, h} \right)^{\frac{3}{2}} + lh \frac{U_a^2}{2g} \qquad (24$$

expresión no homogénea, criticada por Lindquist, y en que U_h es la velocidad media de la parte de la corriente afluente superior al nivel del umbral y U_a la de la corriente afluente en la parte inferior al umbral. Parece poco lógico llegar a una expresión de este tipo con tantas experiencias; considerando que hay que efectuar la medida previa de la repartición de velocidades de aguas arriba, parecería más rápido medir lisa y llanamente las de la vena contraída y no usar fórmula alguna. También es de notar que las velocidades afluentes varían en formas muy diversas, según las circunstancias, tanto en el sentido vertical como en el transversal. (1)

(1) Ultimamente el ingeniero C. G. Cline (Proceedings Am. Soc. C. E. Enero de 1934), aprovechando las experiencias de la Universidad de Cornell que sirvieron a Schoder y Turner, dan para el gasto de un vertedero en pared delgada sin contracción lateral con carga h, largo l, y altura de barrera a, la expresión:

$$Q = 0{,}3044\, l \times 1{,}0654^{h} \times (3{,}2808\, h)^{i} \times 10^{kh} \ \mathrm{m^3 : s}$$

en ella los exponentes valen:

$$i = 1{,}521\ h^{0{,}0081} \qquad k = \frac{0{,}890}{1 + 36{,}52\, a^{\frac{3}{2}}}$$

Esta complicada ecuación, netamente empírica, según la expresión de su autor, da muy buenos resultados, que son muy semejantes a los que da la fórmula de Rehbock y la de la Sociedad Suiza.

A continuación va un cuadro de coeficientes m, calculados haciendo con la ecuación la razón $\dfrac{Q}{lh\sqrt{2gh}} = m.$

Valores del coeficiente de gasto m.

Carga en metros	Altura de barrera en metros								
	0,15	0,30	0,45	0,60	0,80	1,0	1,5	2	∞
0,05	0,437	0,429	0,428	0,426	0,425	0,424	0,424	0,423	0,422
0,075	0,438	0,426	0,422	0,421	0,421	0,420	0,419	0,419	0,416
0,10	0,444	0,427	0,422	0,419	0,418	0,417	0,416	0,416	0,414
0,15	0,456	0,432	0,423	0,421	0,420	0,417	0,415	0,414	0,413
0,20	0,469	0,437	0,428	0,422	0,421	0,418	0,416	0,415	0,414
0,25	0,488	0,447	0,433	0,426	0,423	0,421	0,418	0,417	0,416
0,30	0,505	0,455	0,439	0,429	0,425	0,424	0,421	0,419	0,417
0,35	0,523	0,463	0,443	0,434	0,429	0,427	0,424	0,422	0,419
0,40	0,542	0,471	0,449	0,439	0,432	0,430	0,426	0,424	0,421
0,45	0,562	0,479	0,455	0,444	0,436	0,434	0,429	0,426	0,423
0,50	.....	0,488	0,461	0,449	0,440	0,437	0,432	0,429	0,424
0,60	.....	0,509	0,473	0,459	0,448	0,443	0,437	0,434	0,428
0,70	.....	0,530	0,486	0,467	0,456	0,450	0,441	0,439	0,433
0,80	.....	.....	0,499	0,478	0,463	0,456	0,448	0,446	0,437

Las experiencias de Bazin fueron hechas al aire libre, en un canal de concreto; Rehbock y los demás que experimentaron en laboratorio (King, Schoder y Turner), tomaron precauciones especiales para tranquilizar la corriente afluente y obtener superficies libres, invariables y tersas, por medio de rejillas. El efecto de estas circunstancias es, evidentemente, el de disminuir las desigualdades en las velocidades, o sea, han acercado a la unidad el coeficiente α. En las experiencias de Bazin, como es lógico, con velocidades diferentes entre sí en la corriente afluente influye el ancho del canal y su fórmula no es rigurosamente aplicable en canales de ancho diferente al experimentado. A eso se debe, en parte, sus diferencias con los demás experimentadores. Es de notar que Rehock estudió su fórmula teniendo en vista la similitud mecánica.

Cargas mayores han sido experimentadas por Rafter (1899), Horton y Williams (1903) también en la Universidad de Cornell. El primero llegó a cargas de *1,43* mts. en vertedero de *2* mts, de largo y de *1,59* de altura, encontrando para las cargas que se indican (en metros), los siguientes coeficientes:

h =	*0,68*	*0,80*	*1,00*	*1,20*	*1,43*
h/a =	*0,43*	*0,51*	*0,63*	*0,76*	*1,22*
m =	*0,416*	*0,419*	*0,422*	*0,430*	*0,438*

Los otros experimentaron en un vertedero de *4,85* m. de largo y *3,43* mts. de alto y alcanzaron cargas hasta de *0,7* metros. No detallaremos aquí los resultados de estas experiencias, que pueden consultarse en Hughes & Safford y en las tablas de Williams & Hazen. Sólo observaremos que la fórmula de Bazin extralimitada a estas experiencias, da diferencias muy pequeñas con las de Williams y hasta de 6% por exceso con las de Rafter. De modo que la fórmula de Bazin puede extenderse a estos casos cuando no se quiera mayor precisión.

La fórmula (*19*, da mucho mayores diferencias, por exceso, en estas grandes cargas. La razón de ser de este exceso está, en parte, en haber despreciado los frotamientos en el planteo analítico.

En resumen, no es posible pretender obtener, aplicando una fórmula o un coeficiente experimental en un vertedero de pared delgada con napa libre, una precisión que evite un error de 2%, como término medio. Este error proviene de la fórma de experimentación y de los errores inevitables de medida. En la práctica, para cálculos del ingeniero, basta usar la fórmula de Bazin en canales al aire libre y cualquiera de las otras experimentales si se han tomado precauciones para evitar la turbulencia de la corriente afluente. No es, en ningún caso, el vertedero vertical de napa libre un aparato de aforo de precisión, como lo es el venturímetro.

Ejemplos. N.° 1. ¿Qué gasto pasa sobreuna barrera de *1* mt. de altura, cuyo umbral es un palastro de *1* cm. colocado en un canal de *2,50* mts, de ancho, si la carga medida *2* mts. aguas arriba es de *0,42* m. y la napa es libre?

La fórmula (*19* nos daría un coeficiente de gasto:

$$m = 0,434 + 0,2\left(\frac{0,42}{1,42}\right)^2 = 0,452$$

que multiplicado por el valor de $h\sqrt{2gh}$ según la **Tabla N.° 11**, nos da un gasto $q = 0{,}547\ m^2.s$ por metro de largo de vertedero. Por lo tanto, $Q = 0{,}547 \times 2{,}50 = 1{,}367$ $m^3{:}s$ en todo el canal.

La **Tabla N.° 12** (fórmula de Bazin) nos da inmediatamente: $m = 0{,}434$, o, sea un gasto unitario de $q = 0{,}434 \times 1{,}21 = 0{,}525\ m^3{:}s$ y un gasto total $Q = 0{,}525 \times 2{,}50 = 1{,}313\ m^3{:}s$.

La **Tabla N.° 13** (fórmula de Rehbock) nos da $m = 0{,}427$; un gasto unitario $q = 0{,}516$ y un gasto total $Q = 1{,}292\ m^3{:}s$.

La fórmula suiza (23, para $\frac{a}{h} = \frac{1{,}00}{0{,}42} = 2{,}38$ y $h = 0{,}42$ nos da el coeficiente de gasto $m = 0{,}411 \times 1{,}044 = 0{,}430$, es decir, menos de $0{,}7\%$ de diferencia con Rehbock y casi 1% con Bazin, y su resultado cayó entre ambas.

Como se ve, la diferencia de Rehbock con Bazin es pequeña: sólo de $1{,}6\%$. En cambio, entre Bazin y la fórmula teórica la diferencia sube a 4%.

Ejemplo N.° 2.—¿Qué carga tomaría en el mismo vertedero un gasto de $2\ m^3{:}s$ escurriendo con napa libre?

Se procede por tanteos, notando que el gasto es aproximadamente $q = 0{,}45\ h^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g}$; o sea que:

$$h = \left(\frac{q}{0{,}45\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}63\, q^{\frac{2}{3}}$$

En el caso del ejemplo, el gasto por metro de ancho es $q = 2/2{,}5 = 0{,}8$. Comenzaremos a tantear con:

$$h = 0{,}63 \times 0{,}8^{\frac{2}{3}} = 0{,}54\, m$$

De las tablas obtenemos: $h\sqrt{2gh} = 1{,}76\ m^2.s$.

Bazin da $m = 0{,}439$, Rehbock $m = 0{,}434$ y la fórmula suiza $m = 0{,}440$; como se ve, la diferencia máxima no alcanza a $1{,}5\%$. Se obtendría, según Bazin:

$$Q = 0{,}439 \times 2{,}5 \times 1{,}76 = 1{,}93$$

en vez de $2\ m^3{:}s$. Para hacer un nuevo tanteo se nota que si se prescinde de la variación del coeficiente m entre dos cargas que difieren poco, los gastos (el que es dato Q y el Q_1 que resultó del tanteo), son proporcionales a las potencias $\frac{3}{2}$ de las cargas:

$$\frac{Q}{Q_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ o sea: } h = \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}} \times h_1$$

En nuestro caso:

$$h = \left(\frac{2}{1{,}93}\right)^{\frac{2}{3}} \times 0{,}54 = 0{,}555$$

Efectivamente, para $h = 0{,}555\ m$ se tiene $h\sqrt{2gh} = 1{,}81$; y m, segun Bazin, no varió y por lo tanto:

$$Q = 0{,}439 \times 2{,}5 \times 1{,}81 = 1{,}99\ m^3.s$$

Vertederos inclinados.—La inclinación hacia aguas arriba aumenta la contracción inferior y la inclinación hacia aguas abajo la disminuye: o en otros términos, para una misma carga el gasto disminuye con la inclinación hacia aguas arriba y aumenta con la hacia aguas abajo. Sin anotar aquí los resultados teóricos de Boussinesq, que calzan bien con los experimentales de Bazin, he aquí los coeficientes experimentales por los que hay que multiplicar los gastos de un vertedero vertical de la misma carga, altura y largo:

Incl. $\frac{\text{Base}}{\text{altura}}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{4}$
angulo	*90°*	*45°*	*33°7*	*18°4*	*0*	*—18°4*	*—33°7*	*—45°*	*—63°7*	*76°*
Coeficiente	*0,89*	*0,93*	*0,94*	*0,96*	*1*	*1,05*	*1,09*	*1,12*	*1,14*	*1,10*

Cuando el talud es demasiado suave hacia aguas abajo, equivale a una contrapendiente. La gran longitud que requiere la barrera hace que los frotamientos, absorbiendo carga, disminuyan el efecto de la inclinación. Esto se observa en ángulos mayores de *60°*.

Ejemplo N.° 3.—¿Cuál habría sido el gasto en el ejemplo 1.° si el vertedero, en vez de ser vertical, hubiera tenido una inclinación de *1/1* hacia aguas abajo? (*Fig. 102*).

Segun la fórmula de Bazin habría sido de:

$$Q = 1{,}313 \times 1{,}12 = 1{,}47\ m^3{:}s$$

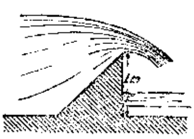

Fig. 102

Ejemplo N.° 4.—Cuál habría sido la carga en el segundo ejemplo si la barrera en vez de ser vertical, hubiera tenido una inclinación de *2* por base por *1* de altura hacia aguas abajo?

El coeficiente que relaciona el gasto del vertedero en cuestión con el vertical, es *1,14* según el cuadro anterior; pero siendo los gastos proporcionales a la potencia $\frac{3}{2}$ de las cargas, se tienen las ecuaciones siguientes para obtener la razón de las cargas:

$$Q = m\sqrt{2g}\ h^{\frac{3}{2}} = 1{,}14\, m\sqrt{2g}\, h_1^{\frac{3}{2}}$$

$$h_1 = \frac{h}{(1{,}14)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0{,}55}{1{,}07} = 0{,}51\ mts.$$

46. Contracción lateral.—El estudio analítico del fenómeno de la contracción lateral presenta dificultades hasta ahora no salvadas. Los primeros experimentadores, asimilando su efecto a una reducción del largo útil del vertedero, daban la siguiente fórmula para la contracción en ambos lados:

$$Q = m\,(l - 2nh)\,h\sqrt{2gh} \tag{25}$$

en que Q es el gasto total y n es un coeficiente que relaciona el ancho perdido en la contracción de cada lado y la carga; l es el largo total del sacado. Cuando la contracción es completa, n vale según Francis $0,1$ y desciende cuando no lo es hasta $0,06$ según las experiencias de Fteley y Stearns.

La ecuación de arriba se puede poner:

$$Q = m\left(1 - 2n\,\frac{h}{l}\right) lh\,\sqrt{2gh} \tag{25a}$$

lo que indica que la contracción lateral disminuye el coeficiente de gasto.

El coeficiente $n = 0,10$ parece indicar que la contracción lateral completa es practicamente igual a la inferior de la napa, avaluada como se sabe en $\varepsilon/h = 0,11$. Se verificaría la contracción completa cuando el canal de aducción deja un espacio mayor de $3h$ a cada lado del vertedero. Como la contracción lateral perturba la distribución de presiones y velocidades en el interior de la vena en un espacio apreciable de su vecindad, es también necesario que el largo del vertedero sea mayor que $3h$ para que las perturbaciones no se encuentren en el interior de la vena. Según esto, la contracción lateral es perfecta si el canal de aducción tiene un ancho mayor de $9h$.

Al introducir la corrección por velocidad inicial en el coeficiente m de una napa contraída lateralmente hay que tener en cuenta el mayor ancho del canal de aducción. En adelante, al tratar de la contracción lateral, llamaremos L al ancho del canal de aducción y l al largo del vertedero. Si la velocidad inicial influye, se tiene la ecuación:

$$Q = m_o\left(1 - 2n\,\frac{h}{l}\right)\left(h + \alpha\,\frac{u_o^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} \times lh\sqrt{2g} \tag{26a}$$

o sea:

$$Q = m_o\left(1 - 2n\,\frac{h}{l}\right)\left(1 + \alpha\,\frac{u_o^2}{2gh}\right)^{\frac{3}{2}} \times lh\sqrt{2gh} \tag{26b}$$

siendo m_o el coeficiente de gasto del mismo vertedero sin contracción lateral y sin velocidad inicial sensible. Según esto, el coeficiente de gasto m será:

$$m = m_o\left(1 - 2n\,\frac{h}{l}\right)\left(1 + \alpha\,\frac{u_o^2}{2gh}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{26c}$$

En este caso, la velocidad inicial nos da las relaciones:

$$u_o = \frac{Q}{(h+a)\,L} = \frac{m\,l\,h\sqrt{2gh}}{(h+a)\,L}\;;\quad \frac{u_o^2}{2gh} = m^2\,\frac{l^2}{L^2}\,\frac{h^2}{(h+a)^2}$$

tomando aquí $m = 0,45$, valor medio de suficiente aproximación para apreciar u_o y considerando sólo los dos primeros términos del desarrollo de la potencia $3/2$ se llega a:

$$m = m_o\left(1 - 2n\frac{h}{l}\right)\left[1 + \frac{3}{2}\,\alpha\, 0{,}20\,\frac{l^2}{L^2}\left(\frac{h}{h+a}\right)^2\right]$$

no introduciremos aquí el valor teórico $m=0{,}434$ que da valores algo exagerdosa del gasto. Pondremos, en cambio, los experimentales de Bazin: $m_o = 0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}$ y $\frac{3}{2}\,\alpha\, m^2 = 0{,}55$. Obtendremos así la expresión:

$$m = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}\right)\left(1 - 2n\frac{h}{l}\right)\left[1 + 0{,}55\,\frac{l^2}{L^2}\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (27$$

que en el caso especial de contracción completa, o sea, $n=0{,}10$, es:

$$m = \left[0{,}405 - \left(0{,}081\,\frac{h}{l} + \frac{0{,}0006}{l}\right) + \frac{0{,}003}{h}\right]\left[1 + 0{,}055\,\frac{l^2}{L^2}\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (27a$$

que da resultados muy de acuerdo con las últimas experiencias de Frese y Hégly.

Han experimentado sobre vertederos en pared delgada con contracción lateral, Francis, Fteley y Stearns, Frese y Hégly. Este último publicó sus experiencias en los «Annales de Ponts et Chaussées» en 1921 con la fórmula siguiente, que él llama «fórmula completa de Bazin»:

$$m = \left(0{,}405 - 0{,}030\,\frac{L-l}{L} + \frac{0{,}0027}{h}\right)\left[1 + 0{,}55\,\frac{l^2}{L^2}\,\frac{h^2}{(h+a)^2}\right] \qquad (28$$

Válida hasta cargas de *0,6* mts. y para toda clase de contracciones, completas e incompletas, suprimida de un lado, etc., para uno o varios sacados que sumados tengan la longitud l. Calza bien esta moderna fórmula con las propias experiencias del autor y con las anteriores desde Lesbros hasta Frese. En la **Tabla N.º 14** va tabulada la fórmula (*28*. Si $L = l$, no hay contracción lateral y se cae en la fórmula (*20*, de Bazin.

Ejemplo N.º 1.—¿Qué gasto escurre sobre un vertedero, cuya barrera tiene *0,80* mts. de altura y *3* mts. de largo, ubicado en un canal que tiene *5* mts. de ancho, de forma rectangular, si la carga es $h=0{,}60$ mts. y el nivel de aguas abajo no influye en el escurrimiento?

Aplicaremos la fórmula de Hégly por medio de la **Tabla 14**. Calcularemos previamente el valor de $\frac{L-l}{L} = \frac{5-3}{5} = 0{,}4$; $\frac{h}{h+a} = \frac{0{,}6}{0{,}6+0{,}8} = 0{,}427$ y $\frac{L}{l} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

La tabla superior para los datos h y $\frac{L-l}{L}$ nos da el valor *0,398* y la inferior para $\frac{l}{L}$ y h de nuestro caso indica el factor *1,037*.

4

Luego $m = 0,398 \times 1,037 = 0,413$. Siendo $h\sqrt{2gh} = 2,06$ y $l = 3$ mts., el gasto que escurre será:

$$Q = 0,413 \times 3 \times 2,06 = 2,56 \text{ m}^3\text{:seg.}$$

Calculando con la fórmula (*27a*, se habría obtenido $m = 0,393 \times 1,037 = 0,408$, o sea, una diferencia de $1,2\%$ con la de Hégly.

EJEMPLO N.° 2.—¿Qué carga habría tenido en el mismo vertedero el gasto de *1* m³:seg?

Haciendo un primer tanteo con el Bernoulli crítico como carga, sin disminuirlo en vista de la contracción lateral, se tendrá:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2 \times g}} = 0,225 \text{ mts.}$$

$$B_c = 0,337 = h$$

A esta carga corresponde, calculando como arriba con la fórmula de Hégly un un coeficiente $m = 0,40 \times 1,018 = 0,407$, coeficiente que daría un gasto de $Q = 1,06$ m³:seg. (1) Si se prescinde de la pequeña variación de m para evitarse un nuevo tanteo, bastará calcular la carga por la expresión siguiente, deducida de la fórmula general:

$$h = \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}} \times h_1 = \left(\frac{1,00}{1,06}\right)^{\frac{2}{3}} 0,337 = 0,324 \text{ mts.}$$

La contracción puede ser imperfecta por existir muros guiadores ubicados aguas arriba del vertedero (*fig. 103*), a falta de experiencias directas se puede aceptar que la contracción lateral tiene el mismo valor que la inferior del vertedero inclinado de ángulo igual al que forman los muros con la dirección de la corriente (ángulo α en la *fig. 103*). Esta aceptación es una extensión de la idea anteriormente expuesta, de la igualdad de la contracción lateral completa con la inferior del vertedero vertical. Según esto, se podría emplear la fórmula (*27*, con los siguientes valores de n, experimentales de Bazin:

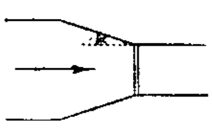

Fig. 103

$tg\,\alpha$ =		3,73	2	1	0,5	0,4	0,27
α =	90°	75°	63°,30'	45°	26°,40'	21°,50'	15°
n =	0,1	0,09	0,07	0,04	0,013	0,0085	0,003

Este cuadro indica que si α es inferior a *15°*, no vale la pena tomar en cuenta la contracción lateral; conclusión experimental análoga a la que se observa en la contracción de salida de los conos convergentes menores de *15°*.

(1) Como se verá después, en vertederos de cresta gruesa en que hay escurrimiento crítico y no hay pérdida de carga, el coeficiente de gasto vale $m = 0,385$, lo que hace ver inmediatamente que en nuestro tanteo el gasto resulta mayor que el de partida en $0,407/0,385 = 1,06$ veces.

En la **Tabla N.° 15** aparecen los valores que toma el paréntesis $\left(1-2n\frac{h}{l}\right)$ de la fórmula (27, con los n de arriba.

Ejemplo N.° 3.—¿Cuál es la carga que toma un vertedero de $2\ m$ de largo, en la barrera de $0,5\ m.$ de altura, situado en un canal de $3,5\ mts.$ de ancho, con muros guiadores de $45°$, si la napa es libre y escurren $2\ m^3{:}s$?

El gasto unitario es $1\ m^3.s$ y el Bernoulli crítico correspondiente es $B_c=0,70\ m.$ Aceptando $h=0,9\ h_c$, lo que da $h=0,63$ para principiar a tantear, se encuentra para la **Tabla N.° 15** el coeficiente $1-2n\frac{h}{l}=0,975$. Para $\frac{l}{L}=\frac{3,5}{2}=0,57$ y $\frac{h}{l}=\frac{0,63}{2}=0,315$ en $\frac{2}{3,5}=0,57$ y para $\frac{h}{h+a}=\frac{0,63}{1,13}=0,56$ se encuentra en la **Tabla N.° 14** que el último paréntesis de la fórmula (27, vale $1,06$. El primer paréntesis de la misma fórmula aparece en la última columna de la **Tabla N.° 12**. Para $h=0,63$, μ vale $0,41$. El coeficiente de gasto es en consecuencia: $m=0,41\times0,975\times1,06=0,424$. Como $h\sqrt{2gh}$, según la **Tabla N.° 11** vale $2,21$, el gasto correspondiente a la carga supuesta será $Q=0,424\times2\times2,21=1,87$. Con este resultado se corrige la carga, calculando la nueva por medio de la ecuación ya conocida:

$$h=h_1\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}}=0,63\left(\frac{2}{1,87}\right)^{\frac{2}{3}}=0,66\ m$$

Este cálculo que supone que m no varía, es efectivamente exacto, pues, recalculando el coeficiente para $h=0,66\ m.$ se encuentra nuevamente $m=0,425$, siendo por tanto esta carga definitiva.

47. Vertederos triangulares y trapeciales.—En la sección de peralte máximo de un vertedero triangular se puede aceptar sin error experimental de consideración, que la presión que hay en el interior de la vena es la atmosférica que la rodea, dado el pequeño espesor de ella. En consecuencia, la aplicación del teorema de Bernoulli desde la sección de aguas arriba donde se mide la carga h, hasta la sección de peralte máximo del filete inferior nos da para la velocidad en ésta, a una altura z del plano de carga el valor: $u=\sqrt{2gz}$ (*Fig. 104*). Esta velocidad es común al elemento de área situado en la altura z. Ahí el área elemental es: $\mu_1\ bdz$, siendo μ_1 su coeficiente de reducción. El gasto del elemento de sección bdz es:

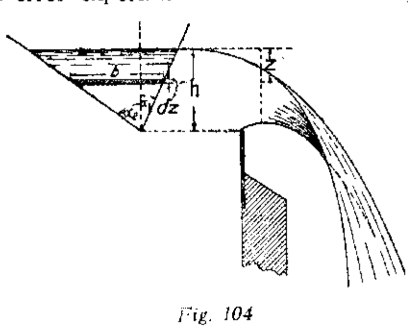

Fig. 104

$$dq=\mu_1 b\sqrt{2gz}\,dz$$

Llamando $tg\alpha$ a la semi-suma de las inclinaciones de los lados del sacado con la vertical; tendremos $b = 2\,(h - z)\,tg\alpha$; lo que nos da para el gasto elemental:

$$dq = 2\,\mu_1\,tg\alpha\sqrt{2g}\,(h - z)\,z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

El gasto total, integral de estos elementos, será:

$$Q = 2\,tg\alpha\sqrt{2g}\int_o^h \mu_1\,(h - z)\,z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

La reducción de cada elemento de area depende probablemente de z. Llamando μ un coeficiente de gasto, podemos poner:

$$Q = 2\,\mu\,tg\alpha\sqrt{2g}\int_o^h (h - z)\,z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$Q = \frac{8}{15}\,\mu\,tg\alpha\,h^2\sqrt{2gh} \qquad (29$$

Experimentalmente se comprueba que μ es un coeficiente de contracción, razón entre el área de la sección de la vena en la vertical del peralte máximo y el área del sacado (1) y que la velocidad media en la vertical de la vena contraída vale:

$$U = \frac{8}{15}\sqrt{2gh} \qquad (30$$

Generalmente se hace $m = \frac{8}{15}\,\mu$

y: $K = m\;tg\alpha\sqrt{2g}$

Entonces: $Q = m\;tg\alpha\;h^2\sqrt{2gh} = K\,h^{\frac{5}{2}}$ (31

Según las experiencias, μ varía algo con el ángulo y la carga, pero, en general, se puede dar la cifra media de $\mu = 0{,}62$ para ángulos comprendidos entre $15°$ y $120°$ y cargas entre $0{,}06$ y $0{,}30$ mts. Ese valor de la contracción, como se ve, es poco diferente del que se mide en orificios de pared delgada.

Entre los mismos límites, y con errores que no suben de 5% en cada ángulo, se

(1) Con este resultado experimental se puede calcular el valor de μ en el vertedero triangular entrante aplicándole el teorema de las cantidades de movimiento. (Vertederos triangulares L. Cruz-Coke y C, Moya, 1924).

pueden dar los siguientes coeficientes de gasto, deducidos de las experiencias hechas en Chile por los señores L. Cruz-Coke y C. Moya. (1)

α =	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	150°
m =	0,355	0,342	0,33	0,322	0,317	0,315	0,316	0,32	0,355
K =	0,20	0,40	0,60	0,815	1,08	1,49	1,84	2,47	5,88

En la **Tabla N.° 16** y el gráfico adjunto a ella se dan los coeficientes experimentales de gasto. Las experiencias citadas calzan muy bien con las de Barr (Engineering, 1910) y con las de Hégly (1921) (2) correspondientes al ángulo de *90°*. Para *90°*, King, en la Universidad de Michigan, (1916) había dado la fórmula, que en medidas métricas sería: $Q = 1,344\ h^{2,47}$ válida con cargas de $0,06 < h < 0,55$ m.

Ultimamente, Easby, en la Universidad de Pensylvania (3) ha experimentado los vertederos de *60°* y *90°*. Los coeficientes de este último dan con las experiencias de Cruz-Coke y Moya, diferencias menores de ½ %, y llegan hasta cargas *0,40* m. En el vertedero de *60°* hay diferencias hasta de *1,5* %. A continuación van los coeficientes de Easby en el vertedero de *90°*.

h=	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40 m.
m=	0,314	0,313	0,312	0,3105	0,309	0,308	0,308

En el vertedero triangular vertical tiene poca influencia la altura, como también el ancho del canal de aducción, pues la pequeñez relativa del sacado de este tipo hace que siempre sea poco sensible la influencia de la velocidad inicial. Así, en el vertedero de *90°* no varía el gasto con la altura de la barrera, aunque el fondo esté muy cerca del vértice del triángulo y el ancho empieza a influir solamente cuando el canal de aducción tiene un ancho menor de $6h$. En el de *45°* esta influencia se nota cuando el ancho es menor de $4h$. La poca variación de los coeficientes de gasto en los vertederos triangulares los acredita como método de aforo de pequeños gastos, como son los de regueras, acequias, etc. Es necesario notar que la medida de la carga ha de ser cuidadosamente hecha, porque el gasto es proporcional a la potencia $5/2$ de h.

En la **Tabla 16 bis** aparecen los módulos por que hay que multiplicar los coeficientes de gasto de la **Tabla N.° 16** cuando el canal de aducción tiene un ancho menor que los límites indicados.

(1) Tesis de los señores Cruz-Coke y Moya. Experiencias hechas en el laboratorio de la Universidad Católica de Chile, en 1923 y 1924. Los ángulos *75°* y *105°* son interpolados; el *150°* es extrepalado.

(2) Hégly experimentó al aire libre con cargas hasta de *45* cm. y resumió sus experiencias en la fórmula: $m = 0,31 + \frac{0,002}{h}$. (Annales des Ponts et Chaussées, Nov-Dic. de 1921).

(3) Transaction of Am. Society, Tomo 93, 1929, pág. 1134.

48. Vertederos trapeciales.—De los vertederos trapeciales usados en EE. UU. como método de aforo, se suele dar una teoría errónea, suponiendo presión nula en el interior de la vena contraída y que el gasto es la suma de los que con la misma carga corresponden al rectángulo y al doble triángulo que forman el sacado. Se supone, además, que es idéntico el coeficiente μ del triángulo y rectángulo y se llega a concluir que la inclinación de los taludes $tg\alpha = \frac{1}{4}$ compensa justamente el efecto de la contracción lateral de un vertedero rectangular de igual base (1). Experimentalmente, este hecho queda desmentido con las experiencias de Stewart y Longuell y las anteriores de Flynn y Dyer (1893). Cipoletti (1887), ideador de este tipo y que le ha dado su nombre, da como resultado de sus experiencias los coeficientes $m = 0{,}419$ y $K = 1{,}86$ para las fórmulas $Q = mlh\sqrt{2gh} = Klh^{\frac{3}{2}}$ en que l es el largo de la base. La inclinación es $tg\alpha = \frac{1}{4}$.

Flynn y Dyer dan para valores de l comprendidos entre 1 y 3 mts. y cargas entre $0{,}06$ y $0{,}45$ mts. los valores medios $m = 0{,}409$ y $K = 1{,}81$.

Etcheverry (2) dice que los coeficientes de Cipoletti dan buenos resultados, siempre que h sea menor que $\dfrac{l}{3}$.

Han experimentado *verteleros circulares*, Hégly, y *parabólicos*, Greve, que no creemos sean de utilidad práctica.

49. Las singularidades de contorno abierto y el régimen del canal en que están situadas. Caso especial del vertedero.—Las singularidades de contorno abierto están tan íntimamente ligadas al régimen del canal en que se encuentran, que para estudiarlas es imposible prescindir de ese régimen. Se puede decir, en general, que

(1) Si se aplica la ecuación de Poleni, que para un vertedero rectangular dice que el gasto vale $Q = \dfrac{2}{3}\mu lh\sqrt{2gh}$ y se supone que el gasto de un vertedero trapecial es la suma de los que pasan por el rectángulo de base l y del doble triángulo de inclinación $tg\alpha$, con la misma carga h, se tiene:

$$Q = \frac{2}{3}\mu_1 lh\sqrt{2gh} + \frac{8}{15}\mu_2 tg\alpha h^2\sqrt{2gh}$$

Si además se supone que el μ tiene un mismo valor en vertedero rectangular y triangular y se saca factor a $\dfrac{2}{3}\mu h\sqrt{2gh}$, se obtiene:

$$Q = \frac{2}{3}\mu h\sqrt{2gh}\left(l + \frac{4}{5} tg\alpha h\right)$$

si esta expresión fuera verdadera se podría decir que $\dfrac{4}{5} tg\alpha h$, sirve para compensar la contracción lateral, que según Francis, tiende a disminuir el ancho útil en $2nh$. Poniendo $n = 0{,}1$, la compensación se haría justamente si

$$0{,}2h = \frac{4}{5} tg\alpha h$$

de donde se ha deducido $tg\alpha = \dfrac{1}{4}$.

(2) Irrigation Practice and Engineering, New York 191, tomo III, págs. 351 y siguientes.

si el régimen del canal depende de aguas abajo, cualquiera variación en éste influye en la singularidad, modificando en ella las circunstancias de escurrimiento, aunque el gasto se mantenga constante. Si el régimen depende de aguas arriba, caso mucho menos frecuente en la práctica, la singularidad obedecerá únicamente a variaciones que vengan de esa parte. La singularidad influye, además, en la determinación del escurrimiento en sus cercanías.

Este hecho puede generalizarse a todas las singularidades introducidas en las corrientes; pero, en las de contorno cerrado; la alteración se refiere casi únicamente a la cota piezométrica, alteración que poco se nota exteriormente. La sección y la velocidad quedan determinadas por la canalización. En cambio en las de contorno abierto, la variación de cota piezométrica es variación de sección, y, por lo tanto, variación de velocidad. De aquí resulta para el cálculo, una dificultad. La forma de la superficie libre y, en consecuencia, la magnitud de las secciones y velocidades, dependen de las circunstancias de la singularidad y de las pérdidas de carga si las hay, pero también éstas son a su vez función de aquellas magnitudes.

Hemos creído útil este preámbulo, antes de entrar al estudio de las formas de napas, distintas de la libre que puede tomar el escurrimiento sobre una barrera de vertedero.

Supongamos que sigue a la barrera un régimen torrencial. Como se estudia en movimiento variado, ese régimen que depende de aguas arriba tendrá como punto de partida la altura h_t del torrente que determinen al pie de la barrera la altura de ella y el gasto que sobre ella escurre. En efecto: la energía por unidad de peso o suma de Bernoulli antes del vertedero, y referida al fondoque le sigue (*fig. 105*) es $H + a$. La napa, contrariamente a lo aseverado por algunos hidraulicistas, pierde parte de su energía en sus cambios de dirección, choques contra el fondo y torbellino sub-napa (1). Por lo tanto, el saldo de suma de Bernoulli, debe ser igual a la profundidad h_t del torrente, más la altura de velocidad correspondiente, o sea:

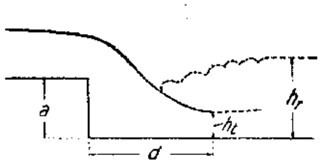

Fig. 105

$$H + a - \Lambda = h_t + \frac{U_t^2}{2g}$$

Si suponemos ahora que por las condiciones de aguas abajo el régimen del canal es de río de profundidad h_r, es necesario averiguar las condiciones de resalto desde el torrente de altura h_c, a ese río, para saber si éste se verifica desde el pie del vertedero, o si es rechazado por un exceso de energía del torrente. En este úl-

(1) Experimentalmente se comprueba que esta pérdida de carga, en función de la altura de velocidad inmediatamente al pie de la napa, en el torrente de filetes paralelos. Puede estimarse con alguna aproximación, si la barrera no es de muy poca alrura por medio de la sencilla expresión:

$$\Lambda = 0.10^{\frac{1}{3}} \frac{U_t^2}{2g} = 0{,}216 \frac{U_t^2}{2g}$$

timo caso, al pie de la napa existiría régimen torrencial. Si las condiciones de resalto indican que el río h_r cubre el pie de la napa, la profundidad h_r determinará la presión en el torbellino inferior; influirá también en la forma y presión dentro de la napa, y por lo tanto, también en la carga del vertedero, si no hay otra circunstancia que lo impida (1). Bazin determinó experimentalmente las relaciones que ligan la profundidad h_r del río de aguas abajo (2) con la carga y altura de barrera, en *el caso límite* en que el resalto se produzca al pie de la napa. Esas relaciones con nuestra denominación serían:

$$\left.\begin{array}{ll} h_r < a & h_r = 1{,}147\,h + 0{,}177\,a \\ h_r > a & h_r = h + 0{,}3\,a \end{array}\right\} \qquad (33$$

El fenómeno que nos ocupa depende de dos factores, el gasto y la altura de barrera. En las expresiones de Bazin el gasto está representado por la carga, h, que deducida de la expresión $q = mh\sqrt{2gh}$ vale:

$$h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{2\,m^2 g}} = 0{,}37\left(\frac{q}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

El coeficiente m es algo variable con h y con a, según las experiencias. Por lo tanto resulta mejor representar el gasto por la profundidad crítica que vale:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

que introducida arriba daría

$$h = \frac{h_c}{(2\,m^2)^{\frac{1}{3}}} = 0{,}79\frac{h_c}{m^{\frac{2}{3}}} \qquad 33)$$

expresión que con los m que se indican, da para la razón $\frac{h}{h_c}$ los siguientes valores:

---

(1) Tal como paralelismo de filetes y ley hidrostática consiguiente, que rigiendo el principio de gasto máximo (como sucede en los vertederos) lleva al escurrimiento crítico. Su destrucción solamente se puede efectuar por aumentos suficientes del Bernoulli que le sigue, pero que no se modifica por simples variaciones de aguas abajo. Pueden verse estas ideas más adelante, en el párrafo 54 y consultarse en el artículo de M. D. Casler: «Stream flow in general terms» Trans. Am. S. C. E., tomo 94 — 1930, pág. 13 y en «Gradas de bajada en canales» (Fco. Javier Domínguez S.) Anales de Inst. de Ing. de Chile.—Año 1922 Núms. Junio, Julio y Sept.

(2) Véase el artículo citado en la nota anterior «Gradas de bajada», N.° de Julio de 1922 de los Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, pág. 398.

$m =$	0,30	0,35	0,385	0,40	0,45	0,50
$\frac{h}{h_c} =$	1,775	1,60	1,500	1,462	1,35	1,26

este resultado revela que en un vertedero es siempre mayor la carga que la profundidad crítica relación que es útil conocer para resolver algunas cuestiones por tanteos.

A continuación van, en función de la altura relativa de barrera, los valores experimentales de las alturas relativas $\frac{h_r}{h_c}$, límite inferior del río que puede haber al pie de la napa. y del torrente $\frac{h_t}{h_c}$ que tiende a producirse en caso de resalto rechazado. Estos valores son válidos cualesquiera que sean las formas de la barrera y de la napa (*Fig. 105*):

$\frac{a}{h_c} =$	0	0,2	0,4	0,6	0.8	1,0	1,20	1,50	1.77	2	2,5	3	4	5	7,5	10
$\frac{h_r}{h_c} =$	1	1.32	1,44	1,52	1,58	1,64	1,68	1,73	1,77	1.80	1,85	1,89	1,99	2.02	2,08	2,10
$\frac{h_t}{h_c} =$	1	0,74	0,66	0,62	0,59	0,56	0,54	0,52	0,50	0,49	0,47	0,45	0,42	0,41	0,39	0,38

Nótese que a las alturas relativas de barrera menores que *1,77*, corresponden profundidades límites mayores que ellas; es decir, que si la barrera es menor de *1,77* profundidades críticas puede haber profundidades de río más altas que el nivel de la cresta, y, sin embargo, ser rechazado el resalto por la napa. En este caso, si se atiende solamente al hecho de comparar la profundidad final h_r con el nivel del umbral, es impropio el nombre de vertedero incompleto que se le suele dar.

Como complemento de estas alturas, puede ser útil agregar las distancias relativas $\frac{d}{h_c}$ contadas desde el plano de la barrera en que se producirá el torrente de altura h_t. Estos valores experimentales (*fig. 105*) sirven para barreras cuyo paramento de aguas abajo es vertical:

$\frac{a}{h_c}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,20	1,50	1,75	2	2,5	3	4	5	7,5	10
$\frac{d}{h_c}$	∞	2,85	2,60	2,49	2,51	2,56	2,63	2,73	2,81	2,92	3,13	3,35	3,76	4,13	4,95	5,79

Para una barrera y un gasto dados, no todas las profundidades de río fijadas por las condiciones de aguas abajo son posibles, pues todas las menores que el límite $\frac{h_r}{h_c}$ no pueden existir al pie del vertedero. De aquí se sigue que las fórmulas de vertederos sumergidos como la de Du Buat, por ejemplo, no pueden usarse sin controlar previamente la posición del resalto. Si el régimen que sigue a la barrera, es torrencial, la primera profundidad del torrente es la fijada en el cuadro anterior.

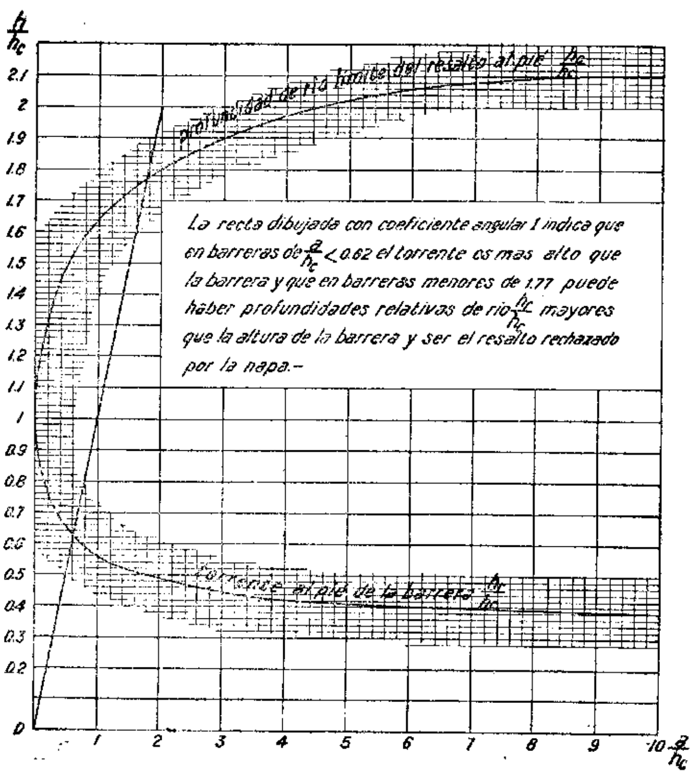

Fig. 106

En el gráfico de la *figura 106* se han dibujado los valores experimentales del expresado cuadro.

(*Continuará*).