Estanislao Fabres PH.

Cálculo del Yield de los Bonos de Amortización Acumulativa

En el número del mes de noviembre de 1926, de los ANALES DEL INSTITUTO DE INGENIEROS, aparece un artículo de don Raúl Simon «Rendimiento de los bonos en empréstitos a largo plazo». En el artículo en cuestión expone el autor un abaco para calcular el yield de los bonos con amortización total y única después de un período determinado; por esto hemos creído que sería de interés la exposición de un método para calcular el rendimiento, o yield, de los bonos con amortización acumulativa, que es el caso más frecuente en los bonos nacionales.

El problema que se presenta es el siguiente: ¿A qué interés efectivo invierte su dinero, una persona que compra en «A» pesos un bono de interés nominal «i», al cual le quedan «t» años de vida, o sea «2t» cupones?

Para facilitar el problema supondremos, que una persona compre, en un momento dado, todos los bonos que van quedando de la emisión, esto equivale a que se haga acreedora al derecho de cobrar una deuda, que va a ser cancelada en «t» años, mediante el pago de una renta fija anual «r»; vamos a avaluar esta deuda, es decir vamos a buscar una fórmula que nos dé el capital «c», acumulado en «t» años, mediante el goce de una renta «r»; para esto planteamos la ecuación diferencial, siguiente:

$$dc=(cy+r)\ dt;$$

o sea: el incremento del capital que se va acumulando mediante una renta «r», siendo el interés en plaza «y», es, por unidad de tiempo, el producto del capital ya acumulado por el interés, más la renta. Integrando la ecuación tendremos:

$$c=\frac{r}{y}(e^{yt}-1) \qquad 1)$$

Ahora bien, para valores de «t» negativos «c» será el monto de lo adeudado un tiempo «t» antes de la extinción de la deuda; tendremos por lo tanto

$$D=\frac{r}{y}(e^{-yt}-1) \qquad 2)$$

Este será el valor de la deuda para el deudor, para el acreedor será por lo tanto «-D». La persona que compra todos los bonos de la emisión, paga por ellos «nA» pesos, siendo «n» el número de bonos y «A» el precio pagado por cada uno; podemos aplicar la ecuación 2) obteniendo:

$$-nA = \frac{r}{y}\left(e^{-yt} - 1\right) \qquad 3)$$

Para el caso en que la operación se haga a la par, el «y» se convierte en el interés nominal «i» del bono, siendo en este caso «nN» la cantidad pagada si «N» es el valor nominal de un bono. Aplicando nuevamente la ecuación 2) tendremos:

$$-nN = \frac{r}{i}\left(e^{-it} - 1\right) \qquad 4)$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación 3) por la 4) obtendremos en el primer miembro la cotización del bono referida a la unidad.

$$\frac{A}{N} = \frac{i\left(e^{-yt} - 1\right)}{y\left(e^{-it} - 1\right)}$$

Esta última ecuación se puede poner en esta otra forma:

$$\frac{1 - e^{-yt}}{yt} = \frac{1 - e^{-it}}{it} \cdot \frac{A}{N}$$

En la tabla I adjunta viene tabulada la función $F(\tau) = \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}$ para valores de «τ» comprendidos entre 0.01 y 6. Entrando a esta tabla con el valor «it» obtenemos el valor de F (it), número que multiplicado por la cotización nos da el valor de F (yt) con el cual encontramos en la misma tabla el valor de «yt» correspondiente; notando que «t» no es más que la mitad de los cupones que le quedan al bono.

La tabla I está calculada para intereses de capitalización continua, siendo que los intereses de los bonos son de capitalización semestral, por lo que el «i» con que habrá que entrar a la tabla será el dado por la expresión:

$$i = 2L\ (1 + i_s/2)$$

siendo «i_s» el interés marcado en el bono; esta fórmula viene tabulada en la tabla II para valores de «i_s» comprendidos entre 0,04 y 0,10. De modo análoga el «y» arrojado por la tabla I será de capitalización continua; para calcular el «y_s» equivalente, habrá que aplicar la fórmula siguiente:

$$y_s = 2\ (e^{y/2} - 1)$$

fórmula que viene tabulada en la tabla III para valores de «y» comprendidos entre 0,06 y 0,15.

Para ilustrar mejor el uso de la tabla haremos un ejemplo numérico. Supongamos un bono de la Caja Hipotecaria del 6% con ¾% cuya cotización actual es de 0,74, y al cual le queden 20 cupones o sea 10 años de vida. La tabla II nos da para «i_s» $=0,06$ «i» $=0,0592$ por lo tanto it $=0,592$; la tabla I nos da para este valor de «it», F (it) $=0,7547$, valor que multiplicado por 0,74 nos da F (yt) $=0,5585$, con este número encontramos en la misma tabla I el valor de yt $=1,305$; o sea «y_e» $=0,1305$ con este valor entramos a la tabla III que nos da finalmente el valor de «y_s» $=13,5\%$.

TABLA I

it	F (it)	it	F (it)	it	F (it)	it	F (it)	it	F (it)	it	F (it)	it	F (it)
0,00	1,0000	0,50	0,7869	1,00	0,6321	1,50	0,5179	2,00	0,4323	3,00	0,3167	4,00	0,2454
01	0,9950	51	7833	01	6295	51	5160	02	4294	02	3150	05	2426
02	9901	52	7798	02	6269	52	5140	04	4265	04	3132	10	2399
03	9851	53	7762	03	6243	53	5121	06	4236	06	3116	15	2372
04	9803	54	7727	04	6217	54	5101	08	4207	08	3098	20	2345
05	9754	55	7692	05	6191	55	5082	10	4179	10	8080	25	2319
06	9706	56	7657	06	6166	56	5063	12	4151	12	3062	30	2294
07	9658	57	7622	07	6140	57	5044	14	4123	14	3047	35	2269
08	9610	58	7588	08	6115	58	5025	16	4096	16	3030	40	2245
09	9563	59	7554	09	6090	59	5007	18	4069	18	3014	45	2221
10	9516	60	7519	10	6065	60	4988	20	4042	20	2998	50	2198
11	9470	61	7486	11	6040	61	4970	22	4015	22	2981	55	2175
12	9423	62	7453	12	6015	62	4951	24	3989	24	2966	60	2152
13	9377	63	7419	13	5991	63	4933	26	3963	26	2950	65	2130
14	9332	64	7386	14	5967	64	4915	28	3937	28	2934	70	2108
15	9286	65	7353	15	5942	65	4897	30	3912	30	2919	75	2087
16	9241	66	7320	16	5918	66	4879	32	3877	32	2903	80	2066
17	9196	67	7288	17	5894	67	4861	34	3862	34	2888	85	2046
18	9152	68	7256	18	5871	68	4843	36	3837	36	2873	90	2026
19	9107	69	7224	19	5847	69	4825	38	3813	38	2858	95	2006
20	9063	70	7192	20	5823	70	4808	40	3789	40	2843	5,00	1987
21	9020	71	7160	21	5800	71	4790	42	3765	42	2828	05	1968
22	8976	72	7128	22	5777	72	4773	44	3741	44	2814	10	1949
23	8933	73	7097	23	5754	73	4756	46	3718	46	2800	15	1930
24	8891	74	7066	24	5731	74	4738	48	3695	48	2785	20	1912
25	8848	75	7035	25	5708	75	4721	52	3672	50	2771	25	1895
26	8806	76	7004	26	5685	76	4704	53	3649	52	2757	30	1877
27	8764	77	6974	27	5663	77	4687	54	3627	54	2743	35	1860
28	8722	78	6944	28	5640	78	4671	56	3604	56	2729	40	1843
29	8681	79	6913	29	5618	79	4654	58	3582	58	2715	45	1827
30	8639	80	6883	30	5596	80	4637	60	3560	60	2702	50	1811
31	8598	81	6854	31	5574	81	4621	62	3538	62	2688	55	1795
32	8558	82	6824	32	5552	82	4604	64	3518	64	2675	60	1779
33	8517	83	6795	33	5530	83	4588	66	3496	66	2662	65	1764
34	8477	84	6765	34	5509	84	4571	68	3476	68	2649	70	1749
35	8439	85	6736	35	5487	85	4555	70	3455	70	2636	75	1734
36	8398	86	6707	36	5466	86	4539	72	3434	72	2623	80	1719
37	8359	87	6679	37	5444	87	4523	74	3414	74	2610	85	1704
38	8319	88	6650	38	5428	88	4507	76	3394	76	2598	90	1690
39	8280	89	6622	39	5402	89	4492	78	3374	78	2585	95	1676
40	8242	90	6593	40	5381	90	4476	80	3354	80	2573	6,00	1663
41	8204	91	6566	41	5361	91	4460	82	3339	82	2560		
42	8165	92	6538	42	5340	92	4445	84	3315	84	2546		
43	8128	93	6510	43	5320	93	4429	86	3296	86	2536		
44	8090	94	6483	44	5299	94	4414	88	3277	88	2524		
45	8053	95	6456	45	5279	95	4399	90	3259	90	2512		
46	8016	96	6428	46	5259	96	4383	92	3240	92	2500		
47	7979	97	6401	47	5239	97	4368	94	3222	94	2489		
48	7942	98	6374	48	5219	98	4353	96	3203	96	2477		
49	7906	99	6348	49	5199	99	4338	98	3185	98	2466		

TABLA II

i_c	i_s
0,04	0,0396
05	0494
06	0592
07	0688
08	0785
09	0882
10	0978

TABLA III

y_c	y_s
0,060	0,609
65	660
70	712
75	764
80	816
85	867
90	920
95	973
100	1026
105	1078
110	1131
115	1184
120	1237
125	1290
130	1343
135	1397
140	1450
145	1504
150	1558