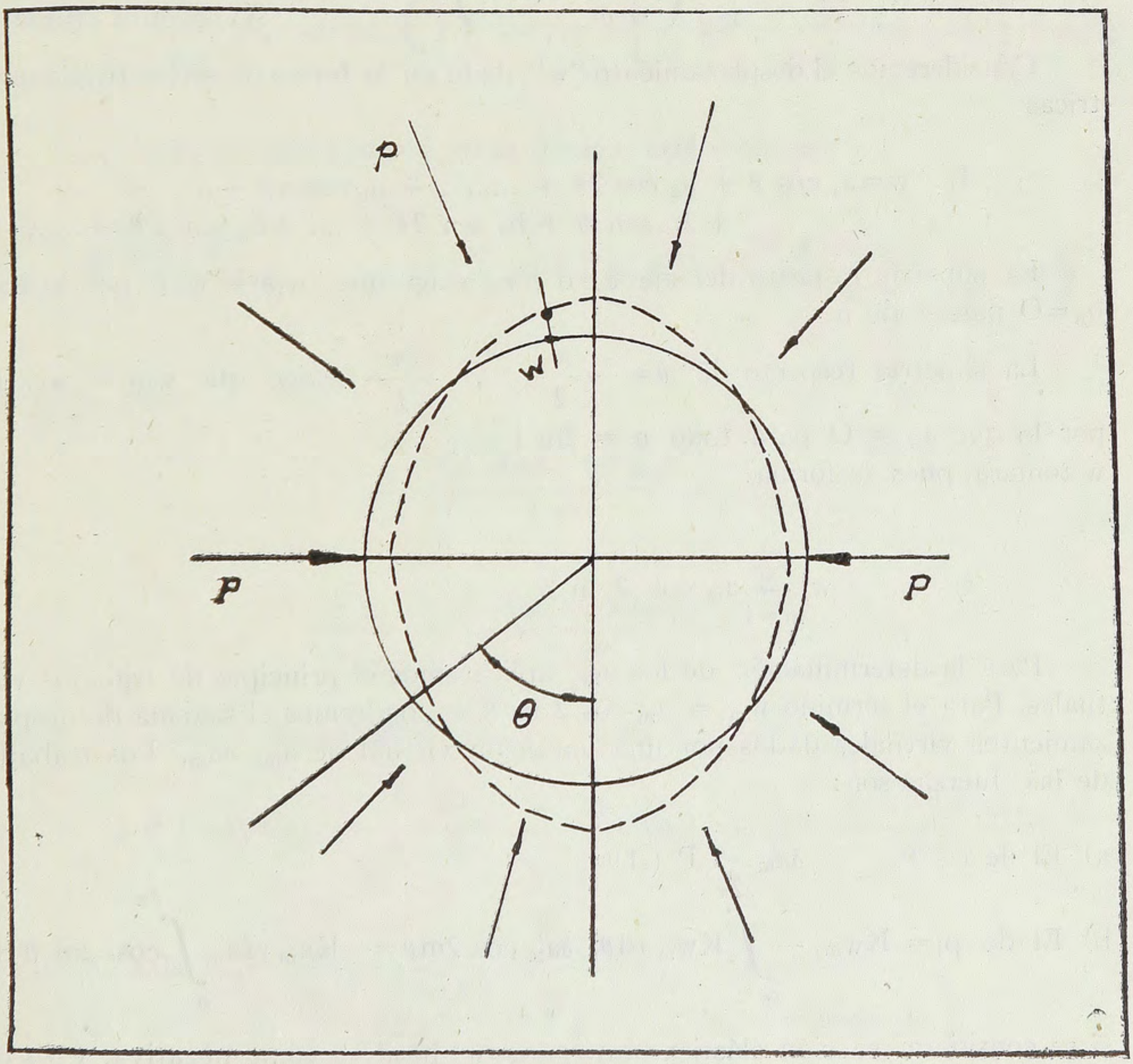
Flambleo de un anillo circular en medio elástico

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural por el Ing. uruguayo Prof. Enrique R. Penadés

1.° *Solución simétrica.*

Sea un anillo circular de radio «r» y sección constante, sometido a una presión «p» uniforme, rodeado de un medio elástico que provoca reacciones del tipo



$p_1 = kw$, en que «w» es la deformación radial, contada positivamente hacia afuera.

Podrá admitirse que las «p_1» existen sólo para «w» positivos, o para todo «w».

El método aplicado por Timoshenko en *Elastic Stability*, art. 40, permite determinar el valor crítico de la presión «p».

Al estado de tensión proveniente de la presión« p», consistente en una compresión constante

$$1) \qquad S = pr$$

superponemos los momentos de flexión provenientes de dos cargas concentradas P, en las secciones $\Theta = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ radiales y diametralmente opuestas más los producidos por las reacciones «p_1.» Suponemos esta flexión inextensional vale decir, que S queda invariada.

La influencia de S en el momento se obtendrá agregando a las fuerzas que, producen momento, una carga radial ficta de intensidad

$$2) \qquad p_2 = \frac{S}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\,\theta^2} + w\right) \qquad \text{(Ver obra citada)}$$

Consideremos el desplazamiento "w", dado en la forma de series trigonométricas

$$3) \qquad w = a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots\ldots + a_n \cos n\theta + \ldots\ldots + b_1 \operatorname{sen}\theta + b_2 \operatorname{sen} 2\theta + \ldots\ldots + b_n \operatorname{sen} n\theta + \ldots\ldots$$

La simetría respecto del eje $\theta = o$, π, exige que $w(\theta) = w(-\theta)$ por lo que $b_n = O$ para todo n.

La simetría respecto de $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ exige que $w(\theta) = w(\pi - \theta)$ por lo que $a_n = O$ para todo $n = 2m-1$
w tomará, pues, la forma:

$$4) \qquad w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2\,m\,\theta$$

Para la determinación de los a_m aplicaremos el principio de trabajos virtuales. Para el término $w_m = a_m \cos 2\,m\,\theta$, supondremos el sistema de desplazamientos virtuales dados por una variación virtual de a_m, δa_m. Los trabajos de las fuerzas son:

a) El de las P, $\quad \delta a_m \cdot 2\,P\,(-1)^m$

b) El de $p_1 = Kw_m$, $-\int_0^{2\pi} Kw_m\, r d\theta .\ \delta a_m \cos 2m\theta = -Ka_m\, r\, \delta a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 2m\,\theta\, d\theta$

si se considera reacción elástica tanto para «w» positiva como negativa, y ½ de ese valor si se la considera sólo para «w» positiva, cosa que haremos en lo que sigue; el signo — proviene de que las fuerzas son opuestas a las deformaciones.

c) El de $p_2 = \frac{S}{r^2}\left(\frac{d^2w_m}{d\theta^2} + w_m\right)$, $-\int_0^{2\pi} \frac{S}{r^2}\left(\frac{d^2w_m}{d\theta^2} + w_m\right) r.d\theta.\delta a_m \cos 2m\theta$

y con $\frac{d^2w_m}{d\theta^2} = -4m^2 a_m \operatorname{Cos} 2m\theta$,

$$+ \frac{S}{r}(4m^2-1)\, a_m\, \delta a_m \int_0^{2\pi} \cos^2 2m\theta\, d\theta$$

Se tendrá, pues, para la expresión de los trabajos virtuales, siendo V la energía de deformación, y observando que $\int_0^{2\pi} \cos^2 2m\theta\, d\theta = \pi$

5) $$\frac{\partial V}{\partial a_m}\delta a_m = \delta a_m \left(2P(-1)^m - \left[\frac{1}{2}Kr - \frac{S}{r}(4m^2-1)\right]\pi a_m\right)$$

La energía de deformación en la flexión, está dada por

$$V = \int^{2\pi} \frac{M^2 r\, d\theta}{2EI} \qquad \text{en la que} \qquad M = -\frac{EI}{r^2}\left(\frac{d^2 w_m}{d\theta^2} + w_m\right)$$

Resulta, pues:

$$V = \frac{EI(4m^2-1)^2 a_m^2}{2r^3}\pi$$

6) $$\frac{\partial V}{\partial a_m} = \frac{(4m^2-1)^2\pi EI}{r^3} a_m$$

Igualando con el valor anterior:

7) $$2P(-1)^m - \pi a^m\left[\frac{Kr}{2} - \frac{S}{r}(4m^2-1)\right] = \frac{(4m^2-1)^2\pi EI}{r^3} a_m$$

de donde sale $a_m = \dfrac{2P(-1)^m}{\dfrac{(4m^2-1)^2\pi EI}{r^3} + \pi\left[\dfrac{Kr}{2} - \dfrac{S}{r}(4m^2-1)\right]}$

o sea

$$8) \qquad a_m = \frac{2\,P\,r^3\,(-1)^m}{\pi\,EI\,(4m^2-1)^2\left[1+\dfrac{K\,r^4}{2(4m^2-1)^2\,EI}-\dfrac{S\,r^2}{(4m^2-1)EI}\right]}$$

Y la expresión general de «w» sería:

$$9) \qquad w = \frac{2\,P\,r^3}{\pi\,E\,I}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos 2\,m\,\theta}{(4m^2-1)^2\left[1+\dfrac{K\,r^4}{2(4m^2-1)^2\,EI}-\dfrac{S\,r^2}{(4m^2-1)\,EI}\right]}$$

El estado crítico surge del hecho de que, independientemente de las P, «w» crece indefinidamente al hacerse 0 algunos de los denominadores.

La compresión crítica S_c sería:

$$10) \qquad S_c = \frac{(4m^2-1)EI}{r^2} + \frac{Kr^2}{2\,(4m^2-1)}$$

Para m = 1 y k = 0, se obtiene la compresión de flambeo del anillo libre.

$$11) \qquad S_c = \frac{3EI}{r^2}$$

Para obtener el menor valor de S_c, derivamos respecto de m:

$$\frac{8mEI}{r^2} - \frac{Kr^2}{2(4m^2-1)^2}\,8m = 0 \;\therefore\; (4m^2-1)^2 = \frac{Kr^4}{2EI}$$

$$12) \qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{1+r^2\sqrt{\frac{K}{2EI}}}$$

La compresión crítica mínima se obtiene de 10) para «m» igual al entero más próximo al valor 12), o, en todo caso, será el menor de los valores correspondientes a los enteros inmediatos.

Si la fórmula 10) valiera para cualquier «m», aún no entero, se obtendría un resultado curioso de sustituir en ella el valor $(4m^2 - 1)^2$ por $\dfrac{Kr^4}{2EI}$

Este sería:

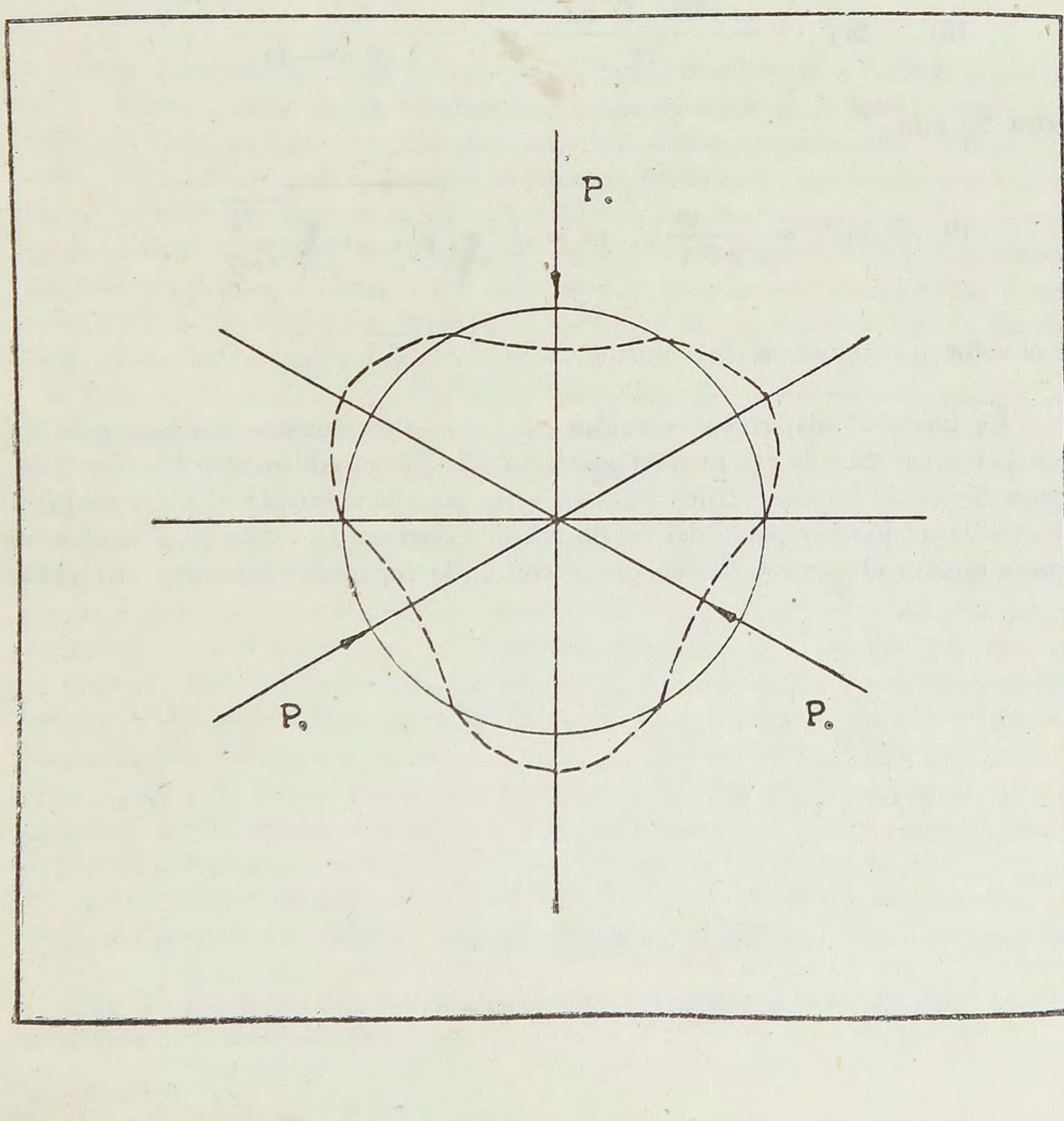
$$13) \qquad S_c\ \text{mín} \approx \sqrt{2KEI}$$

y resultaría independiente del radio. Desde que, en todo caso, $\sqrt{2KEI} \leq S_c$ mín, este valor da una solución expeditiva del problema.

A continuación se expresan los resultados para un anillo de hormigón (E = 200.000 K./cm.²), de 20 m. de diámetro y 30 cm. de espesor ($I = 2.250\ \dfrac{cm^4}{cm}$) para varios valores de K, junto con el «m» correspondiente al mínimo y los valores de p_{cr} y σ_{cr}

$\frac{K}{K/cm.^3}$	m	$\frac{Sc}{K/cm.}$	$\frac{\sqrt{2KEI}}{K/cm.}$	$\frac{p_{cr}}{K/cm.^2}$	$\frac{\sigma^{cr}}{K/cm.^2}$
10	5	95.000	94.800	95,0	3.170
5	4	68.100	67.000	68,1	2.270
2	3	44.300	42.400	44,3	1.440
1	3	30.300	30.000	30,3	1.010
0,1	2	10.080	9.480	10,08	336
0	1	1.350	—	1,35	45

El resultado expresa la influencia decisiva de la resistencia opuesta por el medio elástico, en el sentido de que la carga de flambeo excede a la de ruptura por aplastamiento, a menos que el medio elástico sea excesivamente flojo, resultado análogo al encontrado por Cummings en el estudio de pilotes largos en medio elástico, y comprobado experimentalmente por el citado autor (véase Terzaghi, *Mechanics of soils*).



2.º *Solución antisimétrica*

Proviene de estudiar tres cargas iguales en los puntos definidos por

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad y \quad \theta = \pi$$

La función «w» toma la forma

$$14) \qquad w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 3m\,\theta$$

y a_m resulta

$$15) \qquad a_m = \frac{3\,P(-1)^m\,r^3}{\pi\,E\,I\,(9m^2-1)^2\left[1 + \dfrac{Kr^4}{2(9m^2-1)^2\,EI} - \dfrac{Sr}{(9m^2-1)\,E\,I}\right]}$$

y para la compresión crítica

$$16) \qquad Sc_1 = \frac{(9m-1)\,EI}{r^2} + \frac{K\,r}{2\,(9\,m^2-1)}$$

para Sc mín.

$$(9\,m^2-1)^2 = \frac{K\,r^4}{2\,E\,I} \quad \therefore \quad m = \frac{1}{3}\sqrt{1 + r^2\sqrt{\frac{K}{2EI}}}$$

y el valor aproximado sería el mismo, $Sc \approx \sqrt{2\,K\,E\,I}$

En forma similar se encontrarían expresiones totalmente análogas para 4,5 y más fuerzas. Se observa que, en oposición a lo que sucede en el anillo o la barra recta libres, la tensión crítica mínima sería sensiblemente la misma, en razón de que la acción favorable del medio elástico disminuye su efecto, a medida de que aumenta el número de fuerzas, y con él, la capacidad resistente del anillo.