EDUARDO GUERRA VEGA

Teoría de Newton generalizada

1.—*Espacio y tiempo absoluto de la física clásica*

H. Poincaré y A. Einstein dejaron bien establecido que la geometría puede considerarse, ya sea, como un sistema abstracto de proposiciones (David Hilbert), o como una parte de la física; siempre y cuando se correlacionen previamente los elementos no definibles de la geometría con los observables físicos pertinentes.

Es indudable que este conjunto abstracto de proposiciones ha tenido su origen en la experiencia que tenemos del comportamiento de los sólidos en el estrecho ámbito de la superficie terrestre. Más allá de estos límites estamos obligados a reemplazar la regla rígida por el rayo luminoso. Para que los rayos luminosos puedan considerarse elementos de una geometría es necesario suponer que por dos puntos A y B pasa un solo rayo luminoso, o mejor, que todos los rayos que pasan por A y B coinciden en toda su extensión, esto es, pasan por los mismos puntos del espacio. Esta condición necesaria puede satisfacerse de varios modos que no implican la euclidicidad del espacio. Todo lo que se ha dicho de la geometría es también válido para la mecánica y es entonces posible desarrollar edificios abstractos que pueden o no ser utilizados por la física teórica.

2.—*Teoría del baricentro del universo*

Admitamos que toda partícula en el universo tiene una masa positiva o negativa. Será posible, entonces, definir un punto del universo en el que podrá considerarse concentrada toda la masa, de acuerdo con las conocidas reglas del cálculo baricéntrico. Según este cálculo si se atribuye a dos puntos A y B masas m y n respectivamente, el baricentro de este sistema es un punto C de masa m + n que divide el segmento AB en razón inversa de las masas m y n. Si m y n son del mismo signo, C es un punto del segmento AB situado entre los puntos A y B; si son de distinto signo, C está situado en una de las prolongaciones del segmento AB, y finalmente si $m + n = 0$ el baricentro es un punto infinitamente lejano de masa nula. Estos puntos son los elementos ideales introducidos por la geometría proyectiva o los "vectores" de Grassmann.

La operación de encontrar el baricentro de dos puntos materiales de masas m y n se llama suma y su resultado se expresa escribiendo:

$$mA + nB = (m + n)\,C \qquad 1)$$

Cuando los puntos materiales que se consideran forman un sistema continuo, el baricentro es el resultado de una integración.

$$C = \int P dm \Big/ \int dm \qquad 2)$$

La fórmula 2) permite teóricamente determinar el baricentro de los cuerpos materiales que hay en el universo en el supuesto que se conozca la distribución de las partículas materiales que lo forman y sus masas. La mecánica celeste considera todos los cuerpos que intervienen como puntos materiales cuya posición y masa respecto de ellos mismos se determina por la fórmula 2).

Consideremos un sistema de puntos materiales en movimiento, cuyo baricentro es G, siendo, por consiguiente, G una función de t.

Tendremos,

$$\sum m_i P_i = mG \quad \text{con} \quad m = \sum m_i \qquad 3)$$

Sea S el sistema de coordenadas desde el cual se computan las posiciones, velocidades y aceleraciones de estos puntos materiales. Supongamos que el espacio es euclideano y el tiempo absoluto. Esto quiere decir que la distancia medida entre dos puntos no depende del movimiento del observador como tampoco el intervalo de tiempo medido entre dos sucesos. En particular, dos sucesos simultáneos para un observador lo son del mismo modo para otro cualquiera. Supongamos además que las masas m_i son también absolutas, esto es, independientes de su estado de movimiento con respecto al observador. Derivando, en estas condiciones, la relación 3) con respecto al tiempo, se tendrá:

$$\sum m_i \dot{P}_i = m\dot{G} \qquad 4)$$

Una segunda derivación da:

$$\sum m_i \ddot{P}_i = m\ddot{G} \qquad 5)$$

Ahora bien, si en el sistema S se verifica que $\ddot{G} = 0$, diremos que el sistema S es un "sistema inercial" relativo al sistema de puntos materiales $m_i P_i$.

Es fácil ver que todo otro sistema de coordenadas en movimiento traslatorio uniforme respecto de S es también un sistema inercial respecto del sistema $m_i P_i$.

Si llamamos a los vectores:

$$F_i = m_i \ddot{P}_i \qquad 6)$$

fuerzas de inercia ligadas a los puntos Pi, o aplicadas a los puntos Pi, observamos que se tiene,

$$\sum m_i \ddot{P}_i = 0 \qquad 7)$$

Ecuación que es la expresión general del principio de acción y reacción de Newton, en este caso, sólo para las fuerzas inerciales. Finalmente, si el sistema se reduce a un sólo punto material se verifica que,

$$m\ddot{P} = 0 \qquad 7)$$

de donde

$$\dot{P} = \text{constante} \qquad 8)$$

que no es otra cosa que el principio de inercia, según el cual todo punto material aislado tiene un movimiento rectilíneo uniforme.

Vemos pues, que en los sistemas inerciales así definidos los principios de la mecánica se cumplen para las fuerzas de inercia. Es interesante observar que la ecuación 7) se satisface también para todo punto de masa nula, de tal manera que un punto material de esta naturaleza, se movería con movimiento rectilíneo uniforme. Físicamente este caso puede considerarse como un caso límite al que se acercan algunas partículas de masa muy pequeña. Si se acepta la teoría corpuscular de la luz, ésta debería tener trayectorias muy aproximadamente rectilíneas recorridas con velocidad uniforme, en todo sistema inercial. Esta consideración proporciona de paso una explicación inesperada del papel que las estrellas fijas han jugado siempre en la mecánica celeste.

Debido a su gran distancia del sistema solar sus distancias angulares son casi inalterables, de manera que tres estrellas y el sol definen un triedro prácticamente rígido al que puede referirse el resto de los cuerpos celestes.

En el caso particular de nuestro sistema solar los sistemas inerciales serán aquellos con respecto a los cuales el baricentro del sistema solar tiene un movimiento rectilíneo uniforme. Si este baricentro coincide aproximadamente con el baricentro del sol estaremos en completo acuerdo con los sistemas de referencia usados por Kepler y por los astrónomos actuales para describir el movimiento planetario.

Sin embargo, es evidente, que los sistemas inerciales que hemos definido dependen del sistema de valores atribuídos a las masas m_i del sistema de puntos materiales m_iP_i. En la mecánica clásica la valoración de las masas se hace mediante la balanza. Escogida cierta masa como unidad se supone que mediante la balanza podemos valorar la masa de otro cuerpo cualquiera. En la mecánica celeste, naturalmente, este procedimiento es imposible y la balanza se substituye por la ley de atracción universal de Newton:

$$F = G\, m_i m_k / r^2 \qquad 9)$$

donde m_i y m_k son las masas de dos cuerpos aislados, situados a la distancia r, y G es la constante universal de gravitación. F es la fuerza con que estos cuerpos se atraen y es una magnitud absoluta como el segundo miembro de 9). Si suponemos todas las magnitudes de 9) medibles o dadas será posible calcular toda masa m_k dado m_i, y tomando m_i como unidad tendremos una manera de atribuir un valor numérico a toda masa del universo que podamos oponer a m_i.

Hasta el momento hemos desarrollado la dinámica solamente a base de definiciones, esto es, en forma completamente teórica. La teoría que hemos desarrollado es susceptible de adoptar otras formas más generales, así, por ejemplo, podría asumir que el espacio no es euclideano, que el tiempo no es absoluto, etc., pues, por este camino no hay limitación alguna. Pero todo esto no tiene ningún objeto si no se justifica por la experiencia. Nosotros introduciremos aquí un postulado único que relaciona las construcciones teóricas con la experiencia en forma que de él depende toda la validez del edificio. Este postulado es el siguiente:

La fuerza F de la fórmula 9), salvo el sentido que puede ser opuesto, es vectorialmente igual a la fuerza de inercia que como acción reacción equilibra el cuerpo m_i con el cuerpo m_k suponiéndolos aislados en el espacio. O sea, se tiene:

$$\mathbf{F}_i = |\, m_i \ddot{\mathbf{P}}_i \,| \qquad 10)$$

Todo esto merece, sin embargo, algunas reflexiones. En primer lugar, el uso de la relación 9) para dar un valor numérico a cada masa del universo, tomando una como unidad y colocándola a cierta distancia de la otra, no significa que la fórmula 9) deba necesariamente regir para otras distancias. Por esta razón es que esto es materia de un postulado especial. Pero hay algo más, la definición que hemos dado de los sistemas inerciales no nos obliga a considerar que en estos sistemas las estrellas deban estar fijas, esto es, no implica que los rayos luminosos deban tener en ellos trayectorias rectilíneas recorridas con velocidad uniforme. En efecto, si tomamos como sistema inercial de referencia uno en que esto sucede y en el cual además el baricentro del sistema solar esté fijo, se podrá considerar también sistemas inerciales en rotación con respecto a estos para los cuales siga siendo fijo el baricentro del sistema solar. En estos últimos sistemas son también válidos los principios de la mecánica para las fuerzas de inercia, pero como se sabe aparece aquí un campo de fuerza debido a la rotación. La verdad es que la teoría de Newton no supo distinguir entre estos dos casos y debió admitir que la ley de atracción universal era válida solamente en los sistemas que dejaban las estrellas fijas sin dar de esto una explicación satisfactoria. Nosotros también postularemos la misma cosa llamando a los sistemas inerciales en los cuales la luz tiene trayectorias rectilíneas recorridas con velocidad uniforme, "sistemas galileanos" y sostendremos que en los otros sistemas inerciales rige una ley más complicada:

$$F = G\, m_i m_k / r^2 + Gk\, m_i m_k / r^4 \qquad 11)$$

de tal manera que es posible distinguir entre los sistemas inerciales a los galileanos efectuando mediciones y verificando resultados.

La fórmula 11) introduce una nueva constante k, por determinar. Veremos más adelante que esta constante está relacionada con la velocidad de la luz en el vacío y que el valor del término en que aparece esta constante depende únicamente de la velocidad de rotación que tenga la recta que une las posiciones de los dos cuerpos de masa m_i y m_k con referencia a un sistema galileano.

Para terminar, queremos poner énfasis especial en la idea de que con la relación 11) y en posesión de instrumentos adecuados de medición será posible distinguir entre los sistemas galileanos y los otros sistemas inerciales sin necesidad de ninguna experiencia óptica. Esto naturalmente es sólo en teoría. En la práctica carecemos de instrumentos que nos permitan efectuar mediciones bastante exactas dentro de la dinámica y para tener resultados observables las experiencias tienen que ser hechas a la escala astronómica, donde no podemos prescindir de la óptica, y en el hecho hacemos uso del postulado de que en los sistemas galileanos los rayos luminosos tienen trayectorias rectilíneas recorridas con velocidad uniforme.

3.—*Rotación del perihelio de Mercurio*

Como sabemos la anomalía que tiene el planeta Mercurio en su rotación alrededor del Sol, no tiene explicación dentro de la teoría newtoniana clásica. Según ella, el planeta debiera tener una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos y la experiencia demuestra que la trayectoria de Mercurio no se cierra sobre sí misma, asemejándose a una elipse que tuviera un movimiento lento de rotación de manera que el perihelio en vez de ser un punto fijo en el espacio gira alrededor del Sol con una velocidad angular de 43″ por siglo.

Las ecuaciones que resuelven el problema del movimiento de un cuerpo de masa m alrededor de un centro de atracción de masa M, en un sistema de coordenadas galileano en cuyo origen suponemos situada la masa M, son las siguientes:

$$(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2 = -(GM/a) + (2GM/r) \qquad 12a)$$

$$h = (d\varphi/dt)r^2 \qquad 12b)$$

su resolución proporciona la trayectoria

$$r = p/[1 + e\cos(\varphi - \omega)] \qquad 13)$$

que es una elipse con uno de sus focos en el centro de masa M.

Veamos ahora qué ocurre si resolvemos este mismo problema tomando en cuenta la ley de atracción 11). Puesto que con esta nueva fórmula de atracción la fuerza sigue siendo central y la ley de conservación de la energía sigue siendo válida, el problema general resuelto por las ecuaciones 12a) y 12b) se reduce, ahora, a las ecuaciones:

$$(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2 = -GM/a + 2GM/r + 2kGM/3r^3 \qquad 14a)$$

$$h = (d\varphi/dt)r^2 \qquad 14b)$$

Con el fin de simplificar las operaciones necesarias para resolver este sistema es conveniente reemplazar k/3 por h^2/α^2. Donde α tiene las dimensiones de una velocidad. Se tiene así:

$$(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2 = -GM/a + 2GM/r + 2GMh^2/\alpha^2r^3 \qquad 15a)$$

$$h = (d\varphi/dt)r^2 \qquad 15b)$$

Es interesante observar que el movimiento rectilíneo uniforme satisface estas ecuaciones. Si suponemos la trayectoria rectilínea a la distancia R del centro de atracción y que la fuerza de atracción es nula, se tiene por la 12a): v = constante y por la 12b): h = Rv = constante.

De las ecuaciones 15a) y 15b) se deduce inmediatamente:

$$(h/r^2)^2(dr/d\varphi)^2 + h^2/r^2 = -GM/a + 2GM/r + 2GMh^2/\alpha^2r^3 \qquad 16)$$

y poniendo $u = 1/r$,

$$(du/d\varphi)^2 + u^2 = -GM/ah^2 + 2GMu/h^2 + 2GMu^3/\alpha^2$$

derivando se tiene,

$$(d^2u/d\varphi^2) + u = GM/h^2 + 3GMu^2/\alpha^2 \qquad 17)$$

La integración de esta ecuación se hace por aproximaciones sucesivas. La razón entre el segundo término de 17) y el primero, en el segundo miembro es, $3V_c^2/\alpha^2$, donde Vc es la velocidad transversal del planeta que se considera. Si suponemos el valor de α bastante grande como para despreciar el valor de $(Vc/\alpha)^2$, podemos hacer igual cosa con el término en u^2 de 17) obteniéndose entonces la solución conocida de la mecánica newtoniana.

$$u = (GM/h^2)\,[1 + e\cos(\varphi - \omega)] \qquad 18)$$

donde e es la excentricidad de la órbita elíptica y ω la longitud del perihelio.

Una segunda aproximación se puede obtener substituyendo el valor 18) de u en el segundo término del segundo miembro de la ecuación 17), que se convierte, entonces, en

$$(d^2u/d\varphi^2) + u = GM/h^2 + 3G^3M^3/\alpha^2h^4 + (6G^3M^3/\alpha^2h^4)e\cos(\varphi - \omega) + (3G^3M^3e^2/2\alpha^2h^4)\,(1 + \cos 2(\varphi - \omega)) \qquad 19)$$

Entre los términos adicionales que se obtienen por este procedimiento, el único que produce un efecto apreciable es el término en cos $(\varphi - \omega)$, porque es una solución de la ecuación (19), sin segundo miembro (efecto de resonancia). Sabemos que una solución particular de la ecuación,

$$(d^2u/d\varphi^2) + u = A\cos\varphi$$

es $$u_1 = 1/2\, A\, \varphi \operatorname{sen} \varphi$$

Así resulta para u un término adicional,

$$u_1 = (3G^3M^3/\alpha^2h^4)\cdot e\,\varphi \operatorname{sen}(\varphi - \omega)$$

que debemos agregar al segundo miembro de 18) obteniendo la segunda aproximación,

$$u = GM/h^2\,[1 + e\cos(\varphi - \omega) + 3G^2M^2/\alpha^2h^2 e\,\varphi \operatorname{sen}(\varphi - \omega)]$$
$$u = GM/h^2(1 + e\cos(\varphi - \omega + \delta\omega) \qquad 20)$$

La ecuación 20) se logra simplemente introduciendo un ángulo $\delta\omega$ tal que:

$$\operatorname{sen}\delta\omega = (3G^2M^2/\alpha^2h^2)\,\varphi$$

de donde, el cuadrado de sen $\delta\omega$ es despreciable a causa de α.

De acuerdo con esta ecuación los planetas no describen entonces curvas cerradas como prevé la teoría de Newton, sino que curvas abiertas, vecinas a una elipse cuyo perihelio avanza proporcionalmente a φ, o sea, rota durante un período en una fracción de vuelta,

$$\delta\omega/\varphi = 3G^2M^2/\alpha^2h^2 \qquad 21)$$

h^2 se obtiene fácilmente de 15a), dando a r el valor a-c que toma el radio vector cuando coincide con el gran eje y despreciando el último término del segundo miembro. Como ocurre también que en este punto del perihelio dr/dt = 0, se obtiene,

$$h^2 = GMa\,(1 - e^2)$$

reemplazando este valor en 21), la rotación del perihelio, expresado en fracciones de vuelta por período, es

$$\delta\omega/\varphi = 3GM/\alpha^2a\,(1 - e^2)$$

Los perihelios de los planetas deben, entonces, según la ley de Newton generalizada, poseer un lento movimiento de rotación. Ahora bien, según la teoría establecida por Leverrier sobre el planeta Mercurio, teniendo en cuenta las perturbaciones debidas a otros planetas, en particular a Venus; el desacuerdo entre las previsiones de la mecánica newtoniana clásica y los valores observados es de 43″ por siglo. Nosotros tomaremos este valor no explicado por la teoría de Newton, para determinar experimentalmente el valor de la constante introducida en la fórmula 15a), en razón de la generalización de la ley de atracción universal que hemos propuesto.

Los cálculos numéricos, tomando en cuenta que en el caso de Mercurio, se tiene,

$$GM = 13{,}23 \cdot 10^{25}\,;\; a = 5{,}85 \cdot 10^{12}\,;\; e = 0{,}21$$

y que la duración de su revolución alrededor del Sol es de 88 días, proporcionan para α, el valor,

$$\alpha = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg.} = c$$

o sea, un valor igual, dentro de los errores experimentales, a la velocidad de la luz.

Se resuelve así teórica y experimentalmente el problema suscitado por la rotación del perihelio de Mercurio por un procedimiento que no tiene las dificultades de la Teoría de la Relatividad General. De la ecuación 15a) en combinación con 15b) se desprende que el término de atracción agregado es proporcional al cuadrado de la velocidad angular. Esta fuerza de atracción suplementaria es la que arranca al planeta Mercurio de su órbita elíptica cuando aumenta su velocidad angular al acercarse al perihelio. Veremos más adelante que esta fuerza contribuye a la desviación de los rayos luminosos por el Sol en un alto porcentaje.

4.—*Desviación de los rayos luminosos por la materia*

Ya hemos observado que las ecuaciones 13a) y 13b) se satisfacen para el movimiento de una partícula que es atraída por un centro con una fuerza nula. Si suponemos ser este el caso de la luz en una teoría corpuscular de emisión, vemos que el movimiento de los corpúsculos luminosos debiera ser como es, rectilíneo y uniforme. Por lo menos esto se verifica en nuestra experiencia diaria dentro de los límites en que experimentamos. Pero pudiera ser que existiera una acción de la materia sumamente débil, que, sin embargo, pudiera ser observada cuando se trata de grandes recorridos. Se debe a Einstein esta hipótesis y él dedujo de la teoría general de la relatividad una desviación para un rayo luminoso que pasa tangencialmente al sol, de 1″,74. Es notable que la acción del sol en este caso no es de atracción sobre los corpúsculos luminosos, sino de repulsión.

La desviación de los rayos luminosos por la materia constituyó el *experimentum crucis* que permitió decidir entre la teoría de Newton y la de Einstein, el año 1919, cuando el mundo científico acordó abandonar la teoría de Newton si la experiencia era favorable a la teoría de la relatividad general de Einstein.

Los astrónomos de Greenwich y Oxford verificaron la exactitud de los resultados previstos por Einstein, aprovechando el eclipse total del Sol del 19 de mayo de 1919.

Veamos ahora si la teoría generalizada de Newton puede explicar satisfactoriamente este fenómeno, de la misma manera que lo ha hecho con la rotación del perihelio de Mercurio.

Para esto admitiremos que los fotones son rechazados por la materia según la misma ley con que la materia atrae a la materia, o sea, que todo se verifica como si la masa de los fotones fuera negativa respecto de las masas materiales. Admitiremos además que la velocidad de la luz lejos de toda masa material, en el infinito, es constante e igual al valor de la constante alfa que hemos determinado experimentalmente para la ecuación 13a).

Las ecuaciones 15a) y 15b) se escribirán en este caso, asumiendo que $\alpha = c$, velocidad de la luz en el vacío a infinita distancia de los cuerpos materiales,

$$(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2 = c^2 - 2GM/r - 2GMh^2/c^2r^3 \qquad 21a)$$
$$h = (d\varphi/dt)r^2$$

r es aquí el radio vector que va desde el centro del Sol al fotón que se considera y vemos que para r infinitamente grande la velocidad del fotón será c, disminuyendo con r hasta un mínimum que se alcanza cuando r se hace igual al radio R del Sol. Si designamos por c_1 la velocidad en la vecindad de este mínimum, tendremos según las ecuaciones 21a y 21b).

$$c_1^2 = c^2 - 2GM/R - 2GMh^2/c^2R^3 \qquad 22)$$
$$h = (d\varphi/dt)R^2$$

Tomando en cuenta que $(d\varphi/dt)\,R = c_1$ es posible eliminar h entre las ecuaciones 22) y se tiene,

$$c_1^2 = c^2 - 2GM/R - 2GMc_1^2/c^2R \qquad 23)$$

De esta ecuación obtenemos,

$$c^2/c_1{}^2 = n^2 = (1 + 2GM/c^2R) : (1 - 2GM/c^2R)$$

y considerando despreciable el valor

$$4G^2M^2/c^4R^2,$$

como también lo considera Einstein en su teoría, se tiene,

$$n^2 = 1 + 4GM/c^2R \qquad 24)$$

El campo de gravitación se comporta como un medio refringente cuyo índice de refracción es función de R. La trayectoria de un rayo luminoso, en un medio compuesto de capas concéntricas, satisface la ecuación,

$$np = \text{constante} \qquad 25)$$

p siendo la distancia del centro a la tangente. estas dos ecuaciones son la integral de área y la integral de energía, en el movimiento, según la ley de Newton de una partícula de velocidad c^2/c_1 atraída por una masa 2M. La órbita es una hipérbole cuyo semieje es,

$$a = 2GM/c^2 \qquad 26)$$

esta hipérbole es la trayectoria de la luz.

Si la distancia del vértice al foco es R, tenemos,

$$a(e - 1) = R \qquad 27)$$

y por consiguiente, teniendo en cuenta 26)

$e = 1 + c^2R/2GM$, sensiblemente igual a $c^2R/2GM$

El ángulo muy pequeño entre las asíntotas es,

$2/\sqrt{e^2 - 1}$ ó bien, $2/e$, ó todavía $4GM/c^2R$

Para un rayo que viene desde muy lejos $(-\infty)$ y que se aleja a una gran distancia del centro $(+\infty)$, después de haber pasado a la distancia mínima R del centro de atracción, la desviación total experimentada está dada precisamente por el ángulo formado por las dos asíntotas,

$$\gamma = 4GM/c^2R$$

Esta desviación es doble de la que se calcularía por la ley de Newton en las mismas condiciones, pero sin tomar en cuenta el término suplementario que hemos agregado a la ley de atracción newtoniana.

Para un rayo que pasa tangencialmente al Sol, se tiene,

$$GM/c^2 = 1{,}47 \text{ km}, \qquad R = 697\ 000 \text{ km},$$

por consiguiente,

$$\gamma = 1'',74$$

Llama la atención que la velocidad c^2/c_1 sea precisamente la velocidad de grupo de una partícula de velocidad c_1, según la mecánica cuántica.

Está de más decir que la teoría que hemos desarrollado está en oposición con la experiencia de Michellson sobre la velocidad de la luz. El valor constante de esta velocidad en todas direcciones independientemente del movimiento del observador fué la base de la Teoría de la Relatividad Restringida publicada por Einstein en 1905.

El éxito que hemos obtenido sobre la relatividad general en este trabajo, nos alienta a investigar la posibilidad de una nueva teoría que, sin abandonar el espacio euclideano, sea capaz de dar cuenta de todos los hechos hasta aquí explicados por la relatividad sin las dificultades de ésta, tanto matemáticas como epistemológicas.

Profesor Eduardo Guerra Vega, Investigador en Biomatemáticas. Instituto de Fisiología de la Universidad de Chile, casilla 178-V, Valparaíso, Chile.