Nueva teoría de la figura de los cuerpos celestes

POR

A. OBRECHT

La teoría usual de la figura de los cuerpos celestes supone que la forma de estos cuerpos es la que toma una masa líquida, cuyos puntos se atraen segun las leyes de la gravitacion universal, i que jira uniformente alrededor de un eje de direccion invariable.

El problema así definido es uno de los mas difíciles de la mecánica celeste i no ha sido posible resolverlo de una manera jeneral. Es fácil comprender por qué. En efecto la superficie esterior, siendo de igual presion, debe ser normal, en cada punto, a la fuerza que obra en este punto; esta fuerza es la resultante de la atraccion ejercitada por la masa total del cuerpo i de la fuerza centrífuga; pero la atraccion del cuerpo depende precisamente de la forma de la superficie que lo limita i no se conoce la lei jeneral de esta dependencia, aun en el caso de un líquido homojéneo. Es, por consiguiente, imposible poner el problema en ecuacion.

Sin embargo, la observacion ha sujerido una solucion particular: como la tierra i los planetas tienen una forma análoga a la del elipsoide de revolucion achatado, se admite que estos cuerpos tienen efectivamente esta forma; se calcula entónces la atraccion de un elipsoide en funcion de sus dimensiones i, en seguida, se determinan estas dimensiones de manera que la superficie esterior del cuerpo sea de igual presion.

Es así como se han calculado, en la hipótesis de un líquido homojéneo, los achatamientos de los elipsoides de revolucion que corresponden a los cuerpos celestes cuya velocidad de rotacion es conocida.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Inverso del achatamiento			
	calculado	observado		
Tierra	231,7	293,5	Clarke	(1880)
		298,3	Helmert	(1907)
		297,0	Hayford	(1909)
Marte	174	190	Struve	
Júpiter	9,4	15,0	Sampson	
Saturno	5,1	9,6	Struve	

Este cuadro muestra que los achatamientos calculados son mayores que los observados. La diferencia se atribuye a la variacion de las densidades en el interior de la masa líquida. Efectivamente, en el caso de la tierra, se ha podido restablecer la concordancia, de diversas maneras, con algunas hipótesies mas o ménos plausibles sobre la lei de reparticion de las densidades.

Tal es, en resúmen, el estado actual de la teoría de la figura de los cuerpos celestes.

CORTEZA SÓLIDA

La teoría, anteriormente espuesta, no toma en cuenta la presencia de una corteza sólida. Es verdad que una masa líquida en reposo— absoluto o relativo— permanece evidentemente en reposo si se supone que una parte cualquiera de ella se solidifica, pero es necesario que la parte solidificada tenga exactamente la misma forma i la misma densidad que el líquido primitivo.

En particular, una corteza sólida puede reemplazar una porcion equivalente del líquido i conservar la forma misma de éste, si ella es rigorosamente ríjida. En esta hipótesis, las condiciones del equilibrio de la corteza son las de un sólido invariable i ellas se reducen a espresar que el sistema de las fuerzas que obran sobre ella es equivalente a cero. Se puede observar ademas que estas condiciones de equilibrio son idénticamente satisfechas si la corteza tiene una forma simétrica.

Sin embargo la rijidez absoluta de la corteza es difícil de aceptar, i la observacion demuestra que ella no se verifica a la superficie de la tierra. Por otra parte, es probable que la solidificacion se ha operado progresivamente: al principio las masas sólidas han debido flotar a la superficie del líquido, a la manera de los icebergs; en seguida, el número i el volúmen de estas masas sólidas habiendo aumentado suficientemente, ellas han debido llegar a juntarse como las dóvelas de un puente.

La corteza así formada debia tener una densidad superficial i un espesor mas o ménos constante i el espesor debia ser mui pequeño en comparacion de las dimensiones del cuerpo.

Se admitirá, para fijar las ideas, que la corteza es infinitamente delgada en comparacion de las dimensiones del cuerpo, que el espesor i la densidad superficial son constantes, i que sus elementos pueden considerarse como dóvelas, cuyas superficies de contacto son normales a la corteza.

En estas condiciones una accion dirijida hácia el esterior es susceptible de cambiar las posiciones respectivas de las dóvelas, como si ellas estuviesen articuladas entre sí sobre la superficie de separacion del líquido i de la corteza; pero no sucede lo mismo con las acciones dirijidas hácia el interior i estas se convierten únicamente en compresiones laterales. En otros términos la corteza resiste a los esfuerzos dirijidos hácia el interior. Basta, por consiguiente, para que ella quede en equilibrio, que las fuerzas dirijidas hácia el esterior sean equivalentes, sobre cada elemento superficial, a un sistema de tensiones tanjentes a la corteza.

Se debe observar ahora que, durante la formacion de la corteza, el líquido interior no queda en reposo, porque la superficie de separacion, paralela a la superficie esterior, no coincide con una superficie de igual presion del líquido. Se produce así, en el interior de la masa líquida, una nueva reparticion de las densidades i, una vez los movimientos amortiguados, la superficie de separacion es de igual presion.

Es preciso ahora determinar esta presion. Para esto se observa que, durante el período de solidificacion, la presion total del líquido sobre las masas solidificadas queda siempre igual al peso total de estas masas. Es, por consiguiente, lójico admitir que esta igualdad subsiste cuando las masas sólidas forman una corteza continua.

Precisamente se puede calcular el peso total de la corteza sin que sea necesario conocer la lei de reparticion de las densidades en el interior de la masa líquida; este peso depende sólo, en efecto, de la masa total del cuerpo i de la fuerza centrífuga.

FORMA DE LA CORTEZA

Entre las figuras posibles de equilibrio, es evidente que habrá una de revolucion alrededor del eje de rotacion. Es esta que se trata de determinar. Se admitirá ademas que la superficie buscada es convexa en todas sus puntos.

Sean ρ la densidad superficial de la corteza i P la presion que el líquido interior ejercita sobre ella, ω la velocidad angular de la rotacion; ρ, P, ω son constantes.

Sean tambien dS un elemento de la superficie de la corteza, x su distancia al eje de rotacion i φ su latitud geográfica, o sea el complemento del ángulo formado por la normal al elemento con el eje de rotacion.

Las fuerzas que obran sobre el elemento dS i son dirijidas hácia el exterior son: la presion normal PdS i la fuerza centrifuga $\rho\, \omega\, x\, dS$, perpendicular al eje de rotacion. Estas fuerzas deben ser equilibradas por las tensiones que obran a la periferia del elemento.

Se admitirá que, en cada punto de la superficie de la corteza, la tension que obra sobre un elemento líneal es normal a este elemento i que la razon entre esta tension i el largo del elemento tiene un límite T, independiente de la orientacion del elemento.

Por razon de simetría, T tiene el mismo valor en los puntos de un mismo paralelo i sólo varia con la latitud φ.

Se puede suponer ahora que dS está limitado por dos meridianos i dos paralelos infinitamente próximos; sean ds la distancia de los dos paralelos, R_1 i R_2 los radios de curvatura principales de la superficie. Como las fuerzas que obran sobre $d\,S$ son simétricas respecto de un meridiano, es suficiente, para el equilibrio, que las sumas de las proyecciones de las fuerzas sobre la normal a la superficie i la tanjente al meridiano sean respectivamente nulas. Se obtienen así las dos ecuaciones

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = P + \rho\omega x \cos\varphi \\ & dT = \rho\omega^2 x\, ds\, \mathrm{sen}\, \varphi \end{aligned} \right.$$

Ellas definen, a la vez, la tension T en cada punto i la forma de la corteza.

Se deduce, desde luego, de las ecuaciones (1), que la superficie tiene un plano de simetría perpendicular al eje de rotacion. Es el *ecuador* de la corteza.

La segunda ecuacion (1) supone que los arcos se cuentan, sobre cada meridiano, en un sentido determinado: desde el ecuador hácia el polo; luego, en el caso de una curva convexa, se debe escribir

$$dx = -ds \text{ sen } \varphi$$

Segun esto se tiene

$$dT = -\rho\, \omega^2\, x\, dx \tag{2}$$

Sea T_0 la tension en los pólos, se deduce

$$T = T_0 - \rho\omega^2 \frac{x^2}{2}$$

Se ve que la tension, debida a las fuerzas dirijidas hácia el esterior, es máxima en los pólos de la corteza.

Sea tambien R el radio de curvatura de las secciones normales, en los pólos; la primera ecuacion (1) da

$$T_0 \frac{2}{R} = P$$

Luego

$$T = \frac{PR - \rho\omega^2 x^2}{2} \tag{3}$$

Se tiene ahora

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{d\varphi}{ds}+\frac{cos\varphi}{x}=-\frac{d\varphi\ sen\ \varphi}{dx}+\frac{cos\varphi}{x}=\frac{d\,(x\ cos\varphi)}{xdx^{\text{I}}}$$

Luego, segun (1),

$$Td\ (x\ cos\varphi)=(P+\rho\omega^2\ x\ cos\varphi)\ x\ dx$$

Al combinar esta ecuacion con (2), se deduce

$$d\,(T\ \ x\ cos\ \varphi)=\ Px\,dx$$

Luego

$$Tx\ cos\ \varphi=P\frac{x^a}{2}+C^{te}$$

En el caso de una superficie convexa, la integral obtenida debe aplicarse a los pólos, en donde x es igual a cero. Se deduce que la constante arbitraria es igual a cero. Por consiguiente

$$T\ cos\ \varphi=\frac{Px}{2}$$

O bien, si se reemplaza T por su valor (3),

$$(PR-\rho\omega^2\ x^2)\ cos\varphi\ =Px$$

Sea todavía

(4) $$\alpha\ =\frac{\rho\omega^2\ R}{P}$$

Se averigua que α es un coeficiente numérico i se tiene

$$\left(1 - \alpha \frac{x^2}{R^2}\right) \cos \varphi = \frac{x}{R}$$

De donde

$$x = R\,\frac{\sqrt{1 + 4\alpha \cos^2 \varphi} - 1}{2\,\alpha \cos \varphi} \tag{5}$$

Sean OX, OY, dos ejes rectangulares en el plano de un meridiano: O es el centro de la superficie i OY el eje de rotacion. Se puede espresar la ordenada y de un punto de la curva meridiana en funcion de φ. En efecto se tiene

$$dy = -\, dx \operatorname{cotg} \varphi$$

Por otra parte

$$dx = -\, Rd\varphi \operatorname{sen} \varphi \, \frac{\sqrt{1 + 4\,\alpha \cos^2 \varphi} - 1}{2\,\alpha \cos^2 \varphi \sqrt{1 + 4\,\alpha \cos^2 \varphi}}$$

Luego

$$dy = R\, d\varphi \, \frac{\sqrt{1 + 4\,\alpha \cos^2 \varphi} - 1}{2\,\alpha \cos \varphi \sqrt{1 + 4\,\alpha \cos^2 \varphi}}$$

La integracion da

$$y = \frac{R}{2\alpha} L \frac{\sqrt{1 + 4\,\alpha}\,(1 + \operatorname{sen} \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi + \sqrt{1 + 4\,\alpha \cos^2 \varphi}} \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) i (6) definen así las coordenadas rectangulares de los puntos de una seccion meridiana en funcion de la latitud jeográfica φ.

Achatamiento

Sean $2a$ i $2b$ los dos ejes, ecuatorial i polar, de la superficie; se deduce de (5) i (6),

$$a = R \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}$$

$$b = R \frac{L(1 + 4\alpha)}{4\alpha}$$

Se tiene, por consiguiente, para el achatamiento,

$$(7) \qquad \epsilon = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \cdot \frac{L(1 + 4\alpha)}{4\alpha}$$

Cuando el coeficiente α es pequeño, se puede espresar ϵ bajo la forma de un desarrollo ordenado segun las potencias de α. Se obtiene así

$$(8) \qquad \epsilon = \alpha - \frac{7}{3}\alpha^2 + \ldots$$

Se puede tambien, en estas mismas condiciones, reemplazar los valores (5) i (6) de x e y por desarrollos en serie. Se obtiene

$$x = R \cos\varphi\,(1 - \alpha \cos^2\varphi + \ldots)$$

$$y = R \operatorname{sen}\varphi\,(1 - 3\alpha - \alpha \operatorname{sen}^2\varphi + \ldots)$$

De aquí se deduce

$$a = R\,(1 - \alpha + \ldots)$$

$$b = R\,(1 - 2\,\alpha + \ldots)\;.$$

Luego tambien

$$x = a\,cos\,\varphi\,(1 + \alpha\,sen^2\,\varphi + \ldots)$$

$$y = b\,sen\,\varphi\,(1 - \alpha\,cos^2\,\varphi + \ldots)$$

Estas ecuaciones demuestran que se tiene, al órden de aproximacion de α^2,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por consiguiente, *cuando se desprecia el cuadrado del achatamiento, la curva meridiana coincide con una elipse.*

Si el coeficiente α aumenta i tiende hácia el infinito, la curva meridiana toma un aspecto análogo al de dos segmento de rectas paralelas e infinitamente próximas, unidas en los estremos por dos arcos de curva. El radio de curvatura i la tension, en los pólos, tienden entónces hácia el infinito.

Determinacion de la presion P i del coeficiente α

Sea γ la proyeccion, sobre la vertical del elemento dS, de la atraccion ejercitada por el cuerpo sobre la unidad de masa; el peso del elemento $\rho\,d\,S$ es

$$\rho\,\gamma\,d\,S - \rho\,\omega^2\,x\,dS\,cos\,\varphi$$

Por hipótesis, la presion total PS ejercitada por el liquido sobre la corteza es igual al peso total de ésta. Se tiene, por consiguiente, la ecuacion

$$P\,S=\rho\int\gamma\,d\,S-\rho\,\omega^2\int x\,dS\cos\varphi$$

La primera integral es el flujo de fuerza que atraviesa la superficie esterior del cuerpo. Sean, por lo tanto, M su masa total i f la constante de la gravitacion universal; se tiene

$$\int\gamma\,d\,S=4\,\pi\,f\,M$$

La segunda integral puede trasformarse; en efecío

$$\int x\cos\varphi\,d\,S=2\pi\int x^2\cos\varphi\,ds=2\,\pi\int x^2\,dy$$

O bien, si se designa por V el volúmen total de la corteza,

$$\int x\cos\varphi\,d\,S=2\,V$$

En consecuencia se tiene

$$PS=4\,\pi\,\rho\,f\,M-2\,\rho\,\omega^2\,V$$

Basta ahora sustituir este valor de P en la espresion (4) de α. Se averigua que la densidad ρ se elimina i se obtiene.

$$\alpha=\frac{\omega^2\,RS}{4\,\pi\,f\,M-2\,\omega^2\,V}$$

Se pone ahora

$$\frac{\omega^2\,a^3}{f\,M}=\sigma$$

La cantidad σ así definida es un coeficiente numérico que depende de la velocidad de rotacion, del radio ecuatorial i de la masa total del cuerpo. Se tiene, en seguida,

$$\alpha = \frac{\sigma RS}{4\pi a^3 - 2\sigma V}$$

O bien

$$\sigma = \frac{4\pi a^3 \alpha}{RS + 2V\alpha} \tag{9}$$

En el segundo miembro, las cantidades R, S, V dependen de α i es preciso calcular sus valores.

Se tiene, en primer lugar,

$$S = 2\pi \int x\, ds$$

$$x = R\frac{\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi} - 1}{2\alpha\cos\varphi}$$

$$ds = \frac{dx}{sen\,\varphi} \quad R\,d\varphi\,\frac{\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi} - 1}{2\alpha\cos^2\varphi\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi}}$$

Luego

$$S = \pi R^2 \int \frac{(\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi} - 1)^2\, d\varphi}{\alpha^2\cos^3\varphi\sqrt{1\quad 4\alpha\cos^2\varphi}}$$

Para el volúmen, se tiene

$$V = \pi\int x^2\, dy = \frac{\pi R^3}{4}\int \frac{(\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi} - 1)^3\, d\varphi}{\alpha^3\cos^3\varphi\sqrt{1+4\alpha\cos^2\varphi}}$$

La integracion da

$$S=4\pi R^2 \frac{4\alpha-L(1+4\alpha)}{8\alpha^2}$$

$$V=2\pi R^3 \frac{(1+2\alpha)L(1+4\alpha)-4\alpha}{8\alpha^3}$$

La sustitucion de estos valores en (9) da, en seguida,

$$\sigma=\alpha\left(\frac{a}{R}\right)^3 \frac{4\alpha}{L(1+4\alpha)}$$

O bien

$$\sigma=\alpha\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4\alpha}}\right)^3 \frac{4\alpha}{L(1+4\alpha)}$$

Esta ecuacion permite determinar el valor de α que corresponde a un valor dado de σ. En la práctica se considera una serie de valores equidistantes de α, en la proximidad del que se quiere determinar; se calculan los valores correspondientes de σ i se deduce, por interpolacion, el valor buscado de α.

Cuando σ es mui pequeño se puede espresar directamente α en funcion de σ. Se tiene, en efecto,

$$\sigma=\alpha-\alpha^2+\ldots$$

Luego

$$\alpha=\sigma+\sigma^2+\ldots$$

Al llevar este valor de α en la fórmula (8) se obtiene

$$\varepsilon=\sigma-\frac{4}{3}\sigma^2+\ldots$$

En las aplicaciones es conveniente escribir

$$\sigma=\frac{1}{n}$$

Se tiene entónces la fórmula aproximada

$$\varepsilon=\frac{1}{n+\frac{4}{3}}.$$

Resúmen de las fórmulas

Sean f la constante de la gravitacion universal, ω la velocidad angular de la rotacion de un cuerpo celeste, a su radio ecuatorial i M su masa total. Se calcula el coeficiente.

$$\sigma=\frac{\omega^2\, a^3}{f\, M}.$$

En seguida se calcula otro coeficiente α, definido por la relacion.

$$\sigma=\alpha\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+4\,\alpha}}\right)^3\frac{4\,\alpha}{L\,(1+4\,\alpha)}$$

i se tiene, para el achatamiento.

$$\epsilon=1-\frac{1+\sqrt{1+4\,a}}{2}\;\frac{L\,(1+4\,\alpha)}{4\,\alpha}$$

Cuando σ es mui pequeño, se pone

$$\sigma=\frac{1}{n}$$

i se tiene

$$\varepsilon=\frac{1}{n+\frac{4}{3}}$$

Las Tablas I i II han sido construidas para el cálculo de los achatamientos de Júpiter i de Saturno. La Tabla I da una serie de valores de σ i de ε, con el argumento α; éste varia, de centésimo en centésimo, desde 0,05 hasta 0,20. La Tabla II se ha deducido, por interpolacion, de la primera i ella da directamente el inverso del achatamiento en funcion de σ.

Tabla I

α	σ		ε	
0,05	0,0477	90	0,0449	79
0,06	0,0567	89	0,0538	76
0,07	0,0656	87	0,0604	74
0,08	0,0743	86	0,0678	71
0,09	0,0829	85	0,0749	69
0,10	0,0914	83	0,0818	66
0,11	0,0997	82	0,0884	64
0,12	0,1079	81	0,0948	62
0,13	0,1160	80	0,1010	61
0,14	0,1240	78	0,1071	58
0,15	0,1318	78	0,1129	57
0,16	0,1396	77	0,1186	55
0,17	0,1473	76	0,1241	54
0,18	0,1549	74	0,1295	52
0,19	0,1623	73	0,1347	51
0,20	0,1696		0,1398	

Tabla II

σ	$\frac{1}{\varepsilon}$	
0,05	21,3	3,5
0,06	17,8	2,4
0,07	15,4	1,7
0,08	13,7	1,4
0,09	12,3	1,1
0,10	11,2	0,9
0,11	10,3	0,8
0,12	9,5	0,6
0,13	8,9	0,5
0,14	8,4	0,5
0,15	7,9	0,4
0,16	7,5	0,3
0,17	7,2	

ACHATAMIENTO DE LA TIERRA

El valor de f se deduce de los elementos de la órbita de la Luna i se obtiene

$$\frac{f\,M}{a^2}=\overset{\text{mets.}}{9{,}797}$$

Se tiene, por otra parte

$$\omega=\frac{2\,\pi}{86164}$$

$$a=6.356.500 \text{ met}$$

Luego

$$\sigma=\frac{\omega^2\,a^3}{f\,M}=\frac{1}{289{,}9}$$

De aquí se deduce

$$\varepsilon=\frac{1}{289{,}9+\frac{4}{3}}=\frac{1}{291{,}2}$$

Se ve que el achatamiento obtenido es mui próximo del que dan las medidas jeodésicas. Se debe observar, por otra parte, que el valor deducido de estas medidas supone que la Tierra tiene rigorosamente la forma de un elipsoide de revolucion.

En la realidad, para comparar la nueva teoría con la observacion es menester emplear nuevas espresiones para los arcos de meridiano i los radios de curvatura principales de la superficie.

Para los arcos se parte de la fórmula

$$ds = R\, d\,\varphi\, \frac{\sqrt{1+4\,\alpha\, cos^2\,\varphi}-1}{2\,\alpha\, cos^2\,\varphi\,\sqrt{1+4\,\alpha\, cos^2\,\varphi}}$$

i se deduce, hasta los términos en ε^2 inclusive,

$$ds = a\, d\,\varphi \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{12} - \frac{3}{2}\,\epsilon\, cos\, 2\,\varphi + \frac{5}{4}\epsilon^2\, cos\, 4\,\varphi\right)$$

En consecuencia, el arco comprendido entre dos latitudes φ_0 i φ es

$$s = a\left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12}\right)(\varphi - \varphi_0) - \tfrac{3}{4}\,\alpha\,\varepsilon\,(sen\, 2\,\varphi - sen\, 2\,\varphi_0) +$$

$$\frac{5\,a\,\varepsilon^2}{16}\,(sen\, 4\,\varphi - sen\, 4\,\varphi_0)$$

Se tiene tambien, para el radio de curvatura r del meridiano,

$$r = a\left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12}\right) - \frac{3\,a\,\varepsilon}{4}\, cos\, 2\,\varphi + \frac{5\,a\,\varepsilon^2}{4}\, cos\, 4\,\varphi$$

Finalmente, la gran normal N tiene el valor siguiente

$$N = \frac{x}{cos\,\varphi} = R\,\frac{\sqrt{1+4\,\alpha\, cos^2\,\varphi}-1}{2\,\alpha\, cos^2\,\varphi}$$

O bien

$$N=a\left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5\,\varepsilon^2}{12}\right)-a\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\,\varepsilon^2}{3}\right)\cos 2\,\varphi+\frac{a\,\varepsilon^2}{4}\cos 4\,\varphi$$

Achatamiento de los planetas

Sea σ' el valor de σ que se refiere a un planeta; si se adoptan, para los elementos de éste las mismas letras que en el caso de la Tierra, pero con acentos, se tiene

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)^3\frac{M}{M'}$$

O bien si T, T' son los tiempos de las revoluciones

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\left(\frac{T}{T'}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)^3\frac{M}{M'}$$

Se tiene ahora

	$\frac{T'}{T}$	$\frac{a'}{a}$	$\frac{M'}{M}$	$\frac{\sigma'}{\sigma}$	σ'
Marte	1,029	0,54	0,108	1,38	$\frac{1}{210{,}5}$
Júpiter	0,415	11,14	318,36	25,21	0,087
Saturno	0,428	9,37	95,22	47,16	0,163

El valor de σ' que corresponde a Marte es mui pequeño i el achatamiento se calcula como en el caso de la Tierra. Para Júpiter i Saturno se aplica la Tabla II. Se obtiene en resúmen.

	Inversos del achatamiento		
	Teoría usual	Corteza sólida	Observacion
Tierra	231,7	291,2	293,5 298,3 297,0
Marte	174	212	190
Júpiter	9,4	12,7	15,0
Saturno	5,1	7,4	9,6

Se ve que los resultados deducidos de la nueva teoría presentan mayor concordancia con la observacion que los de la teoría usual.